Inleiding
tot de
Oefeningen
van
Netwerkanalyse

2de Kandidatuur TW

Vrije Universiteit Brussel
Dienst ELEC
Pleinlaan 2
1050 Brussel

Voorwoord

Deze inleiding bevat aanvullende uitleg bij de oefeningen netwerkanalyse in de tweede kandidatuur. Het is in essentie een uitgeschreven vorm van de uitleg die ik de studenten gaf toen ik zelf deze oefeningen begeleidde.

De oefeningenbundel waarvoor deze inleiding geschreven werd, geeft door zijn beknoptheid een iets te simplistische voorstelling van sommige aspekten. Voor deze tekst werd zoveel mogelijk gezocht naar voorbeelden die de mogelijke problemen niet verdoezelen.

De inhoud van deze inleiding maakt niet expliciet deel uit van de te kennen stof voor het theoretisch examen. Het is ook geen vervanging van de theoriecursus.

De kern van deze inleiding is de uitleg over knoopspanningen en maasstromen, en het stuk over het opstellen van differentiaalvergelijkingen bij overgangsverschijnselen. Omwille van de volledigheid werden later de andere hoofdstukken toegevoegd. Een paar dingen die niet in de oefeningen voorzien waren heb ik toch opgenomen. Afhankelijke bronnen, om aan te kunnen tonen hoe sommige methodes daarop struikelen. Proportionaliteit, ten eerste omdat het nuttig is en ten tweede om de grafische oplossingsmethode te verduidelijken. En opamps, omdat die ook in de labo's van tweede kan voorkomen, en om aan te tonen dat netwerken met opamps zonder veel problemen opgelost kunnen worden met de methodes die in de oefeningen aangeleerd worden. Bovendien bestuderen de ingenieur - architekten afhankelijke bronnen en opamps in tweede kandidatuur, en er is geen reden de andere ingenieurs dit plezier te ontzeggen.

Het bepalen welke oplossingsmethode voor een gegeven geval het meest geschikt is verdient grote aandacht. Dit komt helaas niet zo goed tot uiting in deze geschreven nota's. De lezer wordt aangeraden dit zelf te oefenen, door bij het oplossen van een netwerk eerst na te denken en alle oplossingsmethoden na te gaan, en te zien welke meer/minder rekenwerk geven, welke eventueel op problemen kunnen stuiten enz. De kortste en simpelste methode is altijd te verkiezen, want elke rekenstap is een kans om fouten te maken.

Eli Steenput

eerste versie 1995
herwerkt 1996

Inhoud

1. Definities, symbolen en konventies

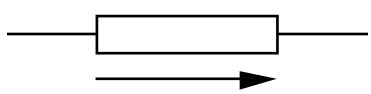
Een elektrische kring bestaat uit geleidend materiaal, een diëlektrisch midden en een magnetische kring. Een netwerk is een voorstelling van een elektrische kring, waarbij de verschillende elektromotorische, resistieve, capacitieve en induktieve eigenschappen van de kring geconcentreerd zijn in geïdealiseerde, discrete elementen (bronnen, weerstanden, condensatoren en spoelen), verbonden door perfecte geleiders. Beschouw bv. een stuk koperdraad. Uit de afmetingen van de draad en de resistiviteit van koper kunnen we de weerstand en de zelfinductie van de draad berekenen, bv. 1Ω en 1mH. De netwerkvoorstelling van deze draad is dan een ideale weerstand van 1Ω in serie met een ideale spoel van 1mH. De verbindingen tussen deze elementen zijn ideale weerstandsloze en inductieloze geleiders. Het verschil met de realiteit is dat in de werkelijke draad deze eigenschappen uitgesmeerd zijn over de lengte van de draad.

Men kan zich afvragen waarom men hierdoor geen grote fout maakt. De meeste elektrische systemen worden eerst ontworpen als netwerk, en in de realisatie tracht men de netwerkvorm zo dicht mogelijk te benaderen. De weerstanden, spoelen en condensatoren die men als bouwstenen gebruikt zullen zo goed mogelijk op ideale componenten lijken. De netwerkanalyse is dus geen zinloze bedoening.

In de netwerkanalyse houden we ons bezig met het bestuderen van een gegeven elektrisch netwerk. Dit in tegenstelling tot netwerksynthese, waar we proberen een netwerk te ontwerpen dat bepaalde gewenste eigenschappen vertoont.

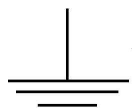
Met analyse wordt bedoeld dat men in het netwerk de elektrische grootheden (spanning, stroom en vermogen) probeert te bepalen. Netwerkanalyse omvat de studie van de methodes die hiervoor aangewend kunnen worden.

De stroom wordt voorgesteld door een pijltje. De waarde van de stroom is positief als de pijlrichting overeenstemt met de konventionele stroomzin (tegengesteld aan de bewegingsrichting der elektronen). Een negatieve waarde voor de stroom betekent dat de stroomzin tegengesteld is aan de pijlrichting.



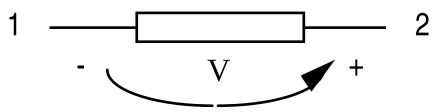
I

Soms zijn we enkel geïnteresseerd in het potentiaalverschil tussen twee punten in het netwerk. Vaak willen we echter de potentialen van alle punten in het netwerk weten. De potentiaal van een punt bepalen we altijd ten opzichte van de één of andere referentie.



Aarding

Dikwijls is het netwerk ergens verbonden met de aarde, zodat we de aarde als referentie kunnen nemen. Zoniet moeten we zelf een punt van het netwerk als referentiepunt kiezen. We berekenen dan alle andere potentialen ten opzichte van deze referentie. Uiteraard zal de waarde van de potentiaal in een punt afhangen van de keuze van het referentiepunt. Er zijn geen echte regels voor de keuze van de referentie.



Een potentiaalverschil wordt aangeduid met +,- tekens. Bij een positieve waarde van het potentiaalverschil is de potentiaal van het punt gemerkt met + hoger dan de potentiaal van het punt gemerkt met -. Pijltjes worden ook gebruikt. In deze nota's worden de pijltjes voor de spanning getekend van - naar +. Dit stemt overeen met een integratierichting. Integreert men (lijnintegraal) van punt 1 naar punt 2, dan is de integraal u_2-u_1, dus positief als de potentiaal van 2 hoger is dan de potentiaal van 1. Met andere woorden, voor een positieve waarde van het potentiaalverschil wijst de pijl in de richting van toenemend potentiaal.

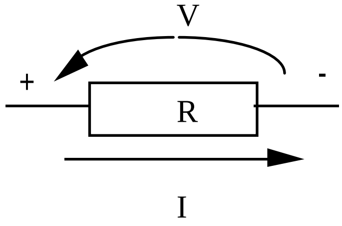
Let op: sommige werken gebruiken spanningspijltjes van + naar -, bv. om dezelfde oriëntatie te hebben als het E-veld. Dit is gewoon kwestie van conventie. Helaas zijn er ook auteurs die de twee door elkaar gebruiken. Dit geeft nogal eens aanleiding tot verwarring.

Merk ook op dat al deze pijltjes enkel dienen om de positieve richtingen aan te duiden in het netwerk. Verwar ze zeker niet met de pijltjes die gebruikt worden om vektoren voor te stellen in vektordiagramma's (zie verder).

1.1 Basiselementen van elektrische netwerken

1.1.1 De weerstand

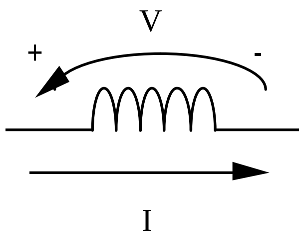
Een weerstand voldoet aan de wet van Ohm: een stroom I zal over een weerstand R een spanning V doen ontstaan, gegeven door



$$V = R.I$$

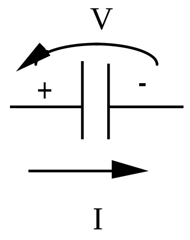
De stroom door een weerstand vloeit van de hoge naar de lage spanning.

1.1.2 De spoel



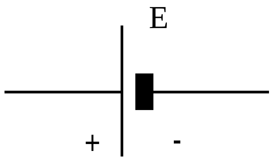
De vergelijking voor een spoel kan geschreven worden als $v(t) = L \frac{d\,i(t)}{d\,t}$ of in integraalvorm $i(t) = I(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt$. Merk op dat in een DC-netwerk waar alle overgangsverschijnselen uitgestorven zijn, de afgeleide nul is. De spanning over de spoel is dan nul, onafhankelijk van de stroom die erdoor stroomt. In dit geval kan de spoel behandeld worden als een kortsluiting. (zie verder)

1.1.3 De condensator

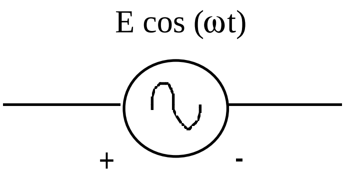


De vergelijking voor een condensator kan geschreven worden als $i(t) = C \frac{d\,v(t)}{d\,t}$ of in integraalvorm $v(t) = V(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt$. Merk op dat in een DC-netwerk waar alle overgangsverschijnselen uitgestorven zijn de stroom door de condensator nul is, onafhankelijk van de spanning die erover staat. In dit geval kan de condensator behandeld worden als een open klem. (zie verder)

1.1.4 De spanningsbron



gelijkspanningsbron

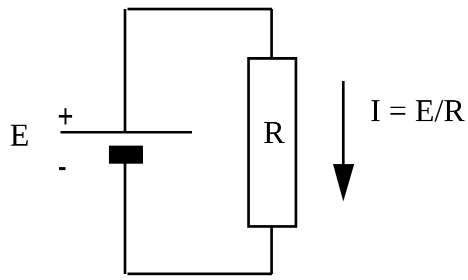


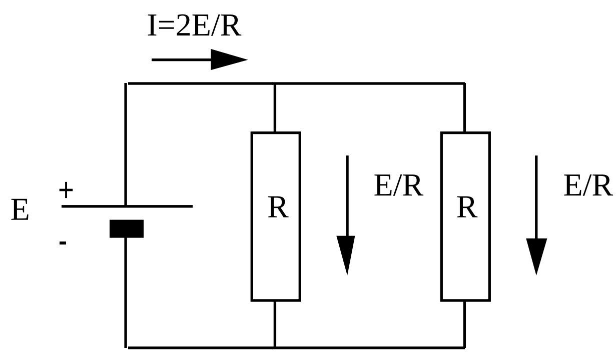
wisselspanningsbron

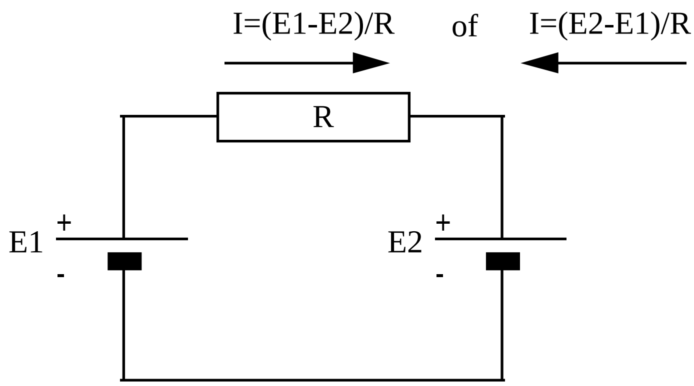
Een spanningsbron legt een spanning E op tussen de twee uiteinden. Merk op dat de polariteit van de wisselspanningsbron ook aangegeven is. Dit kan op het eerste zicht vreemd lijken. Als de spanning bv. gegeven is door Vcos(wt) moet men echter weten welke kant van de bron positief is op t=0, zoniet kan men een fasefout maken van 180_. Dit levert totaal verschillende oplossingen indien er meer dan één bron in het netwerk voorkomt.

De stroom door de spanningsbron wordt bepaald door het uitwendige netwerk. Men moet eerst het netwerk oplossen alvorens men deze stroom kan bepalen. Een oplossingsmethode die vereist dat men de stroom door een spanningsbron kent, kan dus niet. Dit moet je goed beseffen.

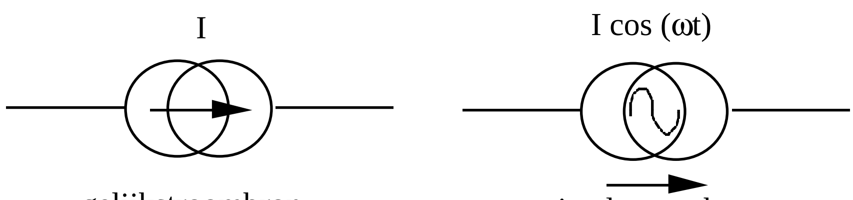
Voorbeelden die aantonen dat de stroom door een spanningsbron afhangt van de rest van het netwerk:







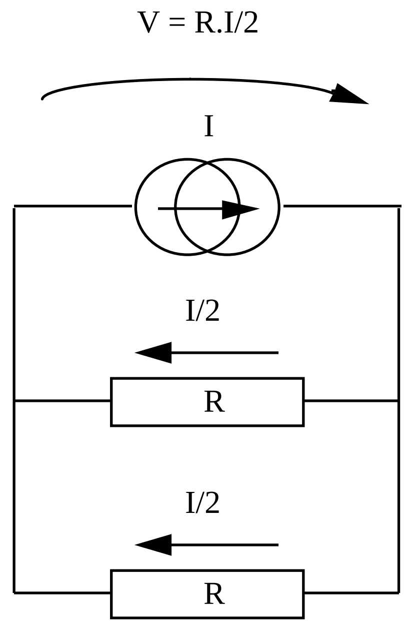
1.1.5 De stroombron

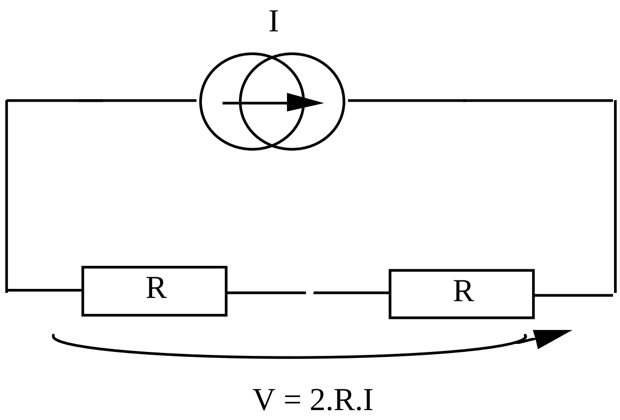


gelijkstroombron wisselstroombron

Deze legt de stroom vast door de tak waarin ze opgenomen wordt. De spanning over een stroombron variëert naargelang het uitwendig netwerk. (zie opmerking bij de spanningsbron)

Voorbeeld:





1.1.6 Afhankelijke bronnen

(Afhankelijke bronnen worden vermeld om in de verdere uiteenzetting de toepasbaarheid van de verschillende methodes beter te illustreren, en eveneens om een beter begrip van de OPAMP toe te laten - zie verder.)

Een afhankelijke bron is een spannings- of stroombron waarvan de waarde van de spanning of de stroom funktie is van een spanning of stroom elders in het netwerk.

Voorstelling:

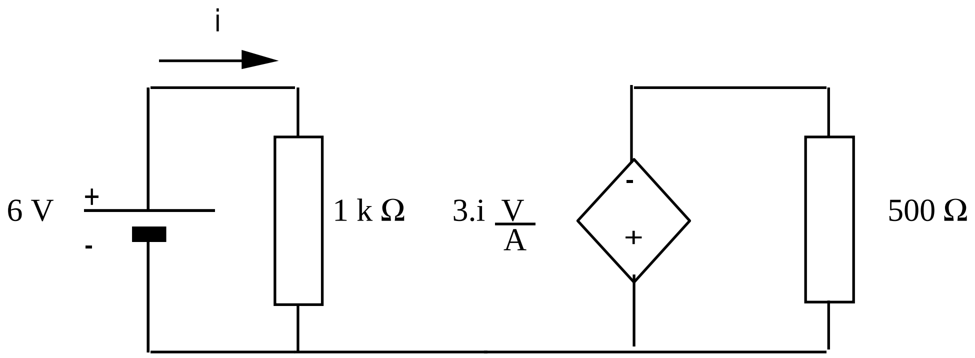
gestuurde stroombron gestuurde spanningsbron

We beperken ons hier tot lineair afhankelijke bronnen in vier mogelijke uitvoeringen:

spanningsgestuurde stroombron, spanningsgestuurde spanningsbron, stroomgestuurde stroombron en stroomgestuurde spanningsbron.

Bij bv. de stroomgestuurde spanningsbron is de spanning dan gegeven door een formule van de vorm V = ß.i , met i een stroom ergens in het netwerk en ß een konstante evenredigheidsfactor.

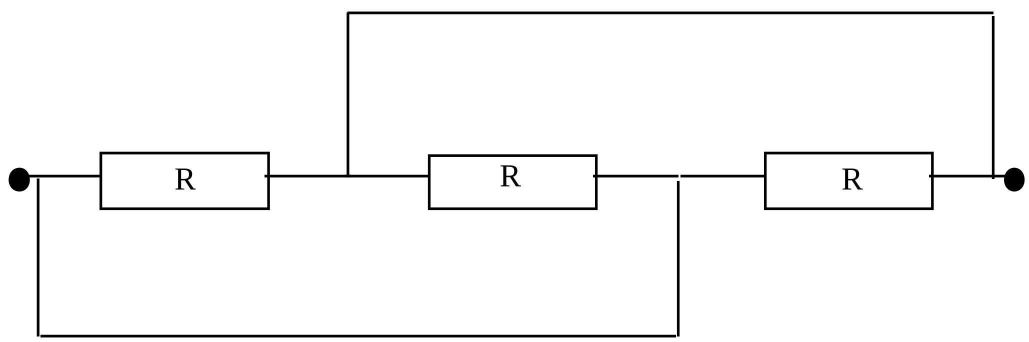
Voorbeeld:

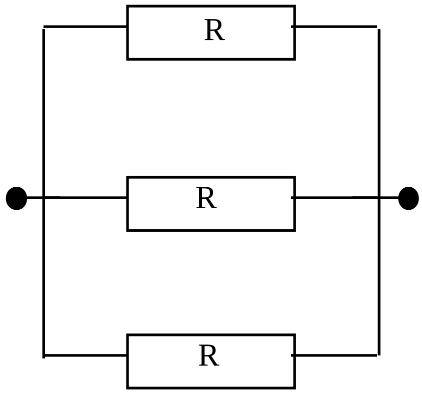


1.1.7 De kortsluiting

Met kortsluiting bedoelt men een stuk ideale geleider. Hiermee worden de verschillende elementen van het netwerk (bronnen, weerstanden enz.) met elkaar verbonden. Een kortsluiting legt de uiteinden op dezelfde spanning, onafhankelijk van de stroom die door de kortsluiting vloeit. Een kortsluiting is dus ekwivalent met een spanningsbron met E = 0 Volt, of een weerstand met R = 0 ½.

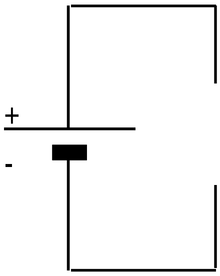
De componenten van een netwerk kunnen op verschillende wijze met elkaar verbonden worden, zonder dat de funktie van het netwerk verandert. Dit is iets dat u goed moet oefenen. De volgende twee netwerken bv. zijn identiek:





Opmerking: een kortsluiting in de negatieve betekenis slaat op een kortsluiting op de verkeerde plaats, bv. tussen de twee klemmen van een spanningsbron.

1.1.8 De open klem



Dit is een ideale isolator. Door een open klem vloeit geen stroom, onafhankelijk welke spanning erover staat. Dit is ekwivalent met een stroombron met I = 0 Ampère, of een oneindige weerstand.

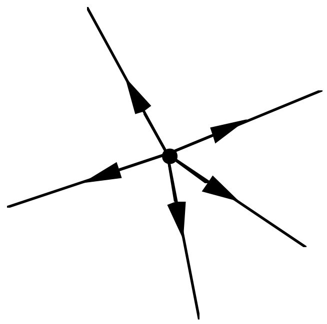
Opmerking: een open klem in serie met een stroombron is even ongepast als een kortsluiting in parallel met een spanningsbron.

2. Enkele oplossingsmethoden

In het volgende worden verschillende oplossingsmethoden voorgesteld. Omwille van de duidelijkheid zullen eerst netwerken met enkel gelijkspannings- en gelijkstroombronnen en weerstanden beschouwd worden. Alle oplossingsmethoden zijn min of meer rechtstreeks gebaseerd op de twee wetten van Kirchhoff.

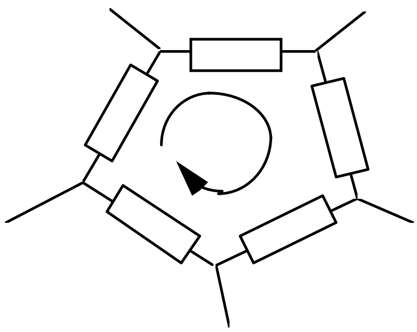
2.1. Eerste wet van Kirchhoff (KCL)

De som van alle stromen door een gesloten oppervlak is 0. Dit geldt dus ook voor de som van de stromen in alle takken die samenkomen in een punt.



2.2. Tweede wet van Kirchhoff (KVL)

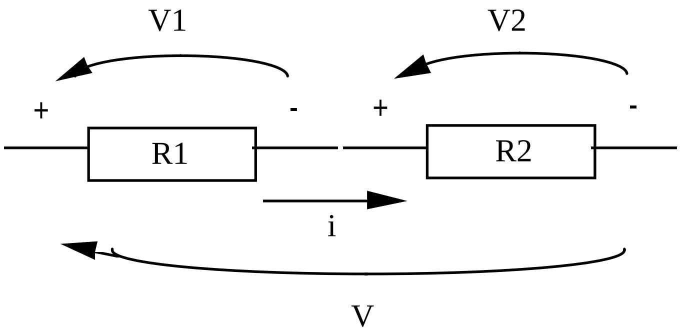
De som van de spanningen over een gesloten kring is 0.



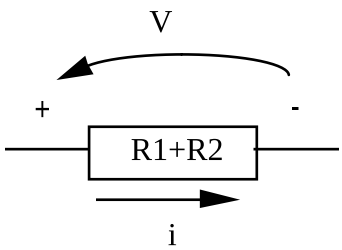
Met deze twee wetten, in combinatie met de V-I relaties voor de elementen (wet van Ohm), is men in staat willekeurige netwerken te analyseren. Alle methoden die verder besproken zullen worden, doen niets anders dan deze wetten zo effektief mogelijk toepassen. Dit moet u goed onthouden.

Een eerste reeks methodes zal het gegeven netwerk proberen om te zetten in een eenvoudiger netwerk, waarin de gezochte variabele dezelfde waarde heeft.

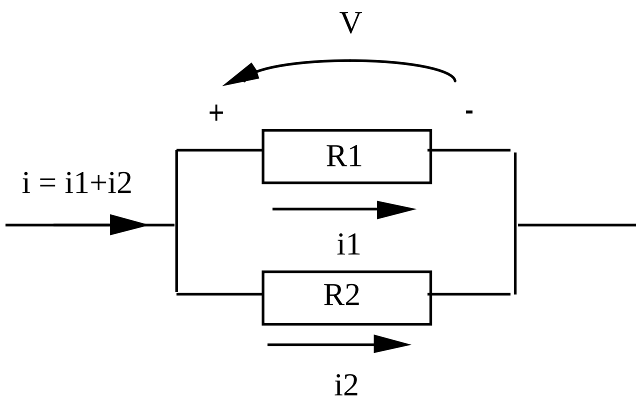
2.3. Serieschakeling van weerstanden



Aangezien er geen aftakking is tussen de twee weerstanden, is de stroom door beide weerstanden dezelfde (KCL). De spanning over de twee weerstanden samen is $V = V_1 + V_2 = R_1.i + R_2.i = (R_1 + R_2).i$. We zien dus dat wat de wet van Ohm betreft, we deze twee weerstanden mogen vervangen door één enkele ekwivalente weerstand, met als waarde de som van de twee.



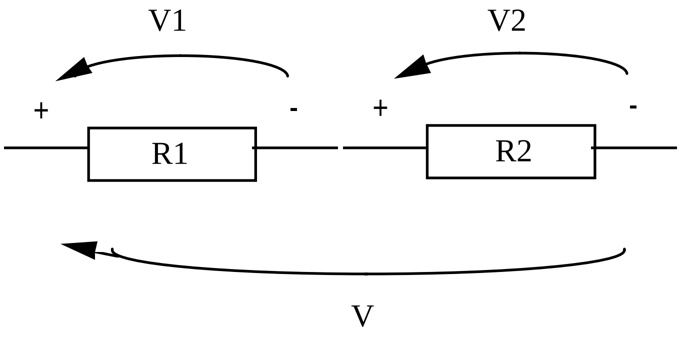
2.4. Parallelschakeling van weerstanden



Wanneer twee weerstanden in parallel geschakeld zijn, staat over allebei dezelfde spanning (KVL). De stroom door de twee weerstanden is de som van de stromen door elke weerstand afzonderlijk (KCL), dus $i = i_1 + i_2 = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).v$.

We kunnen dus de parallelschakeling van twee weerstanden vervangen door één enkele ekwivalente weerstand, met als waarde $R = \frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2}$. Omwille van de beknoptheid wordt dit ook wel geschreven als $R_1//R_2$.

2.5. Spanningsdeler

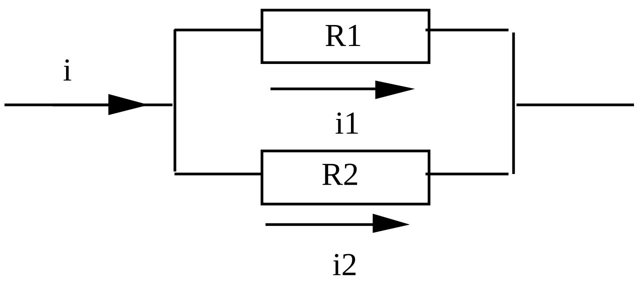


Als de spanning V gegeven is, kunnen V_1 en V_2 als volgt berekend worden:

$$V_1 = R_1 \frac{V}{R_1 + R_2}$$

$$V_2 = R_2 \frac{V}{R_1 + R_2}$$

2.6. Stroomdeler



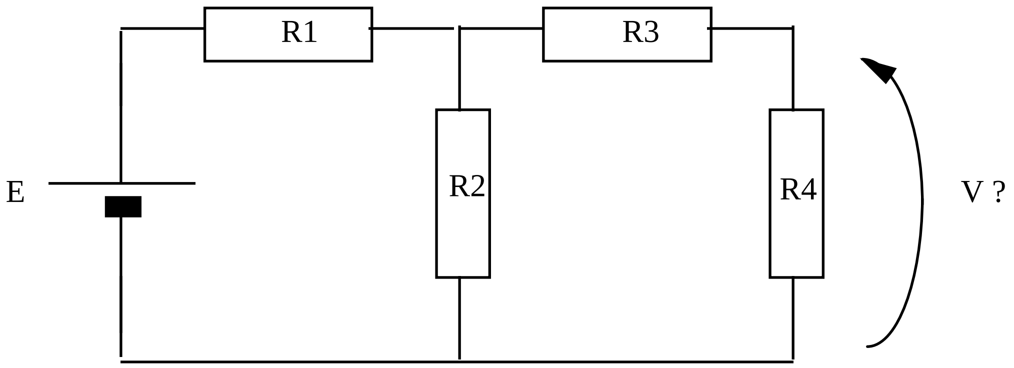
Uit de stroom i kunnen we i_1 en i_2 als volgt bepalen:

$$i_1 = \frac{1}{R_1} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$$

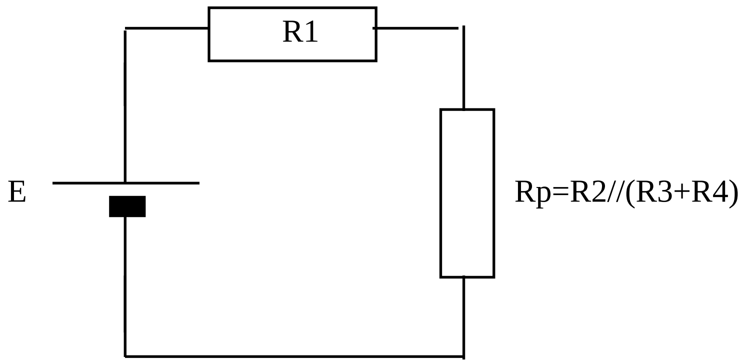
$$i_2 = \frac{1}{R_2} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

2.6.1. Oplossen van een netwerk met behulp van de spanningsdeler

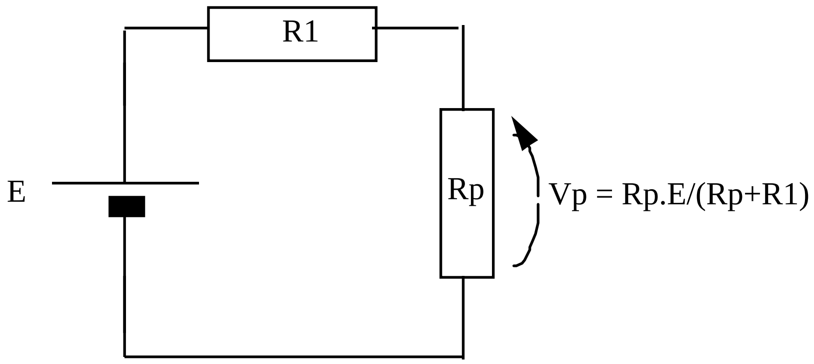
Beschouw als voorbeeld het volgende netwerk:



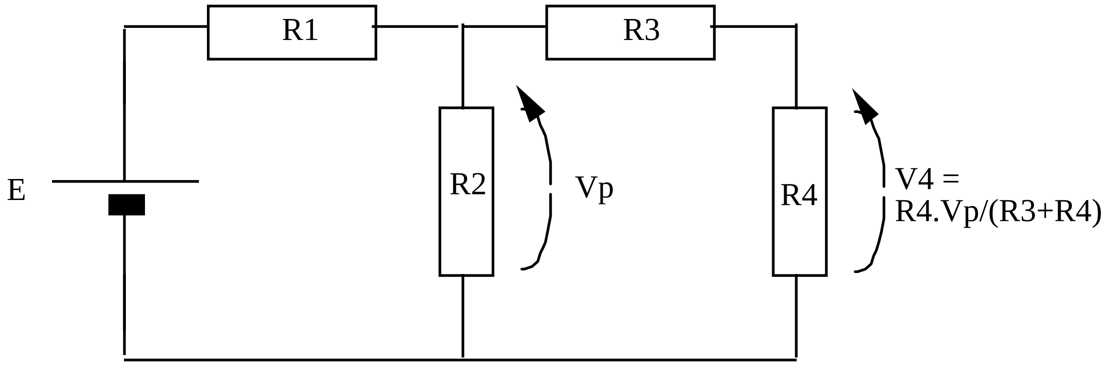
Dit is ekwivalent met:



De formule van de spanningsdeler geeft dan:

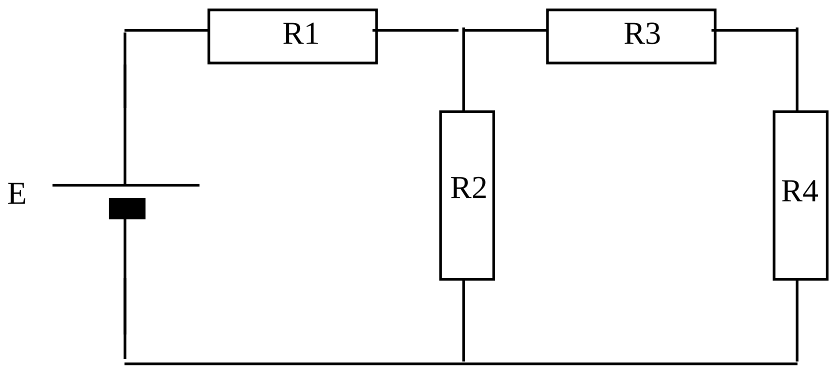


In ons netwerk is $V_p = V_2$ (=spanning over de weerstand R_2). Nog eens de spanningsdeler toepassen op R_3 en R_4 geeft V_4:

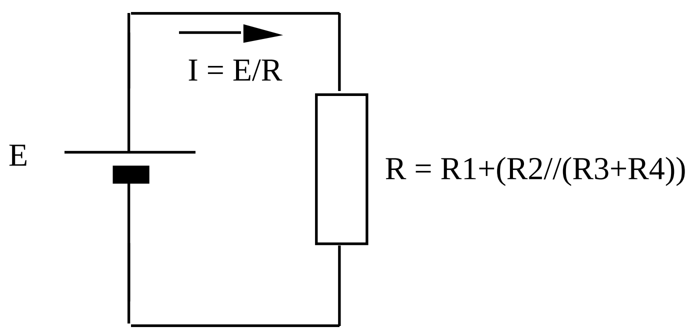


We kennen nu de spanning in elke knoop van het netwerk.

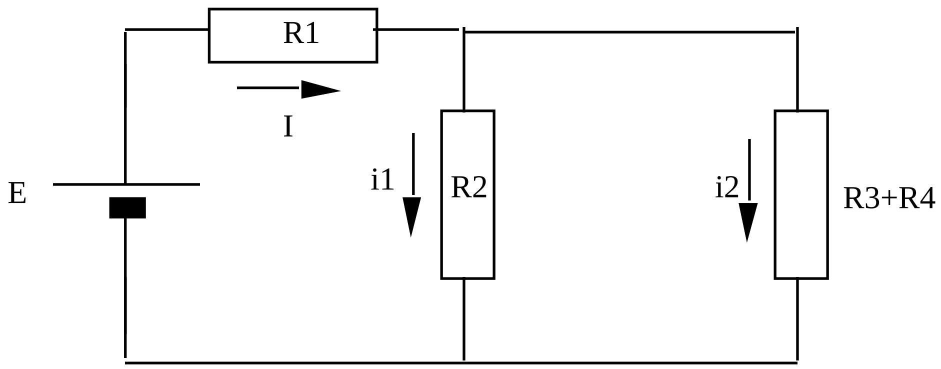
2.6.2. Oplossen van een netwerk met behulp van de stroomdeler



is ekwivalent met:



toepassing van de stroomdeler op R_2 en (R_3+R_4) geeft:



$$i_1 = \frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} \cdot I$$

$$i_2 = \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} \cdot I$$

We kennen nu alle stromen in het netwerk.

2.7. Methode der proportionaliteit

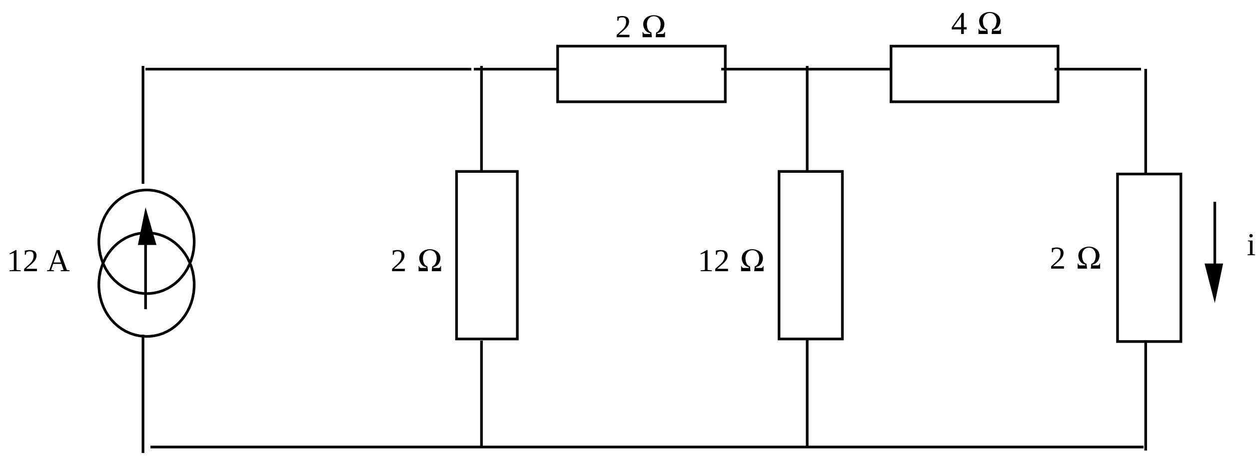
Deze methode berust op de proportionaliteitseigenschap van lineaire netwerken. Deze eigenschap zegt dat als een bron x ergens in het netwerk een waarde (spanning of stroom) y oplevert, een bron a.x een waarde a.y zal opleveren. Deze methode is één van de snelste voor het oplossen van laddernetwerken met één bron, maar ze is algemeen toepasbaar onder dezelfde voorwaarden als de spanningsdeler-stroomdeler. Toegepast op complexe netwerken geeft deze techniek ons de grafische oplossingsmethode (zie verder).

(Een laddernetwerk is een netwerk dat er uitziet als een ladder.)

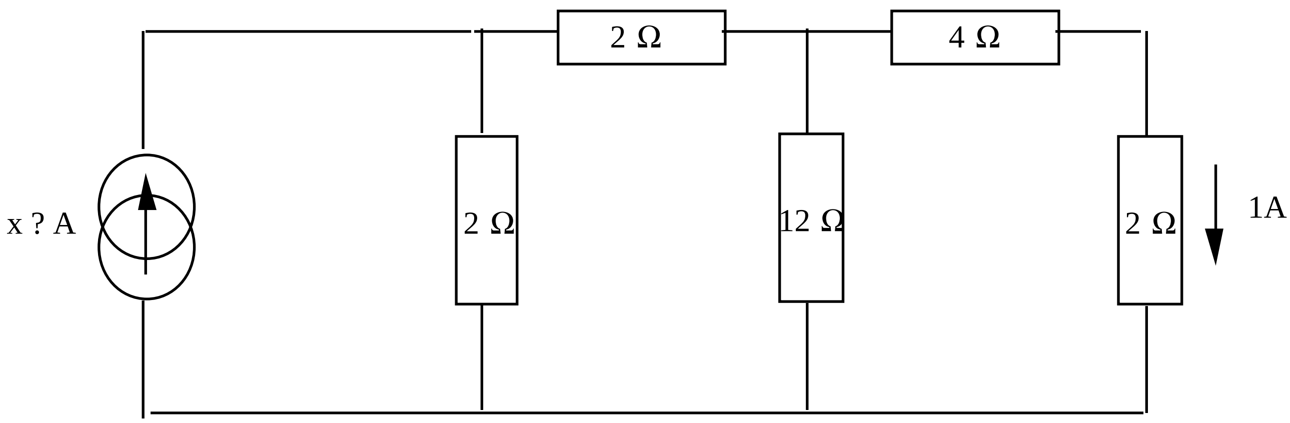
Om het netwerk op te lossen keren we het probleem om, m.a.w. we stellen de waarde die we willen bepalen bv. gelijk aan 1, en we zoeken de bronsterkte x die hiermee overeenstemt. De werkelijke waarde is dan de verhouding van de gevonden bronsterkte x en de werkelijke bronsterkte. Meestal wordt als referentie een stroom gekozen. (Omdat we dan moeten vermenigvuldigen met de weerstand om de spanning te bekomen. Een spanning als referentie geeft meteen al een breuk voor de stroom. Niet meer dan dat.) Bij een laddernetwerk kiezen we de stroom die het verst van de bron af ligt.

Voorbeeld:

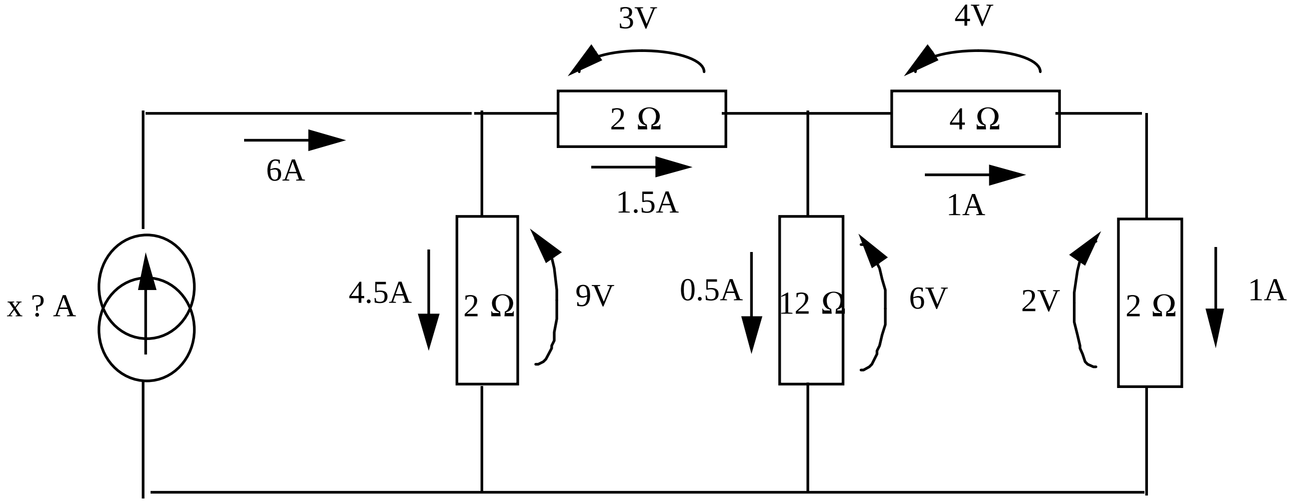
Bepaal in het volgende netwerk i via proportionaliteit.



We stellen i=1A en we berekenen welke stroombron daarmee overeenstemt.



Van rechts naar links werkend bekomen we snel:



1A.2½ = 2V = spanning over de weerstand van 2½.

1A.4½ = 4V = spanning over de weerstand van 4½.

2V+4V = 6V = spanning over de weerstand van 12½.

6V/12½ = 0,5A = stroom door de weerstand van 12½.

1A+0.5A = 1,5A = stroom door de weerstand van 2½.

1,5A.2½ = 3V = spanning over de weerstand van 3½.

3V+6V = 9V = spanning over de weerstand van 2½.

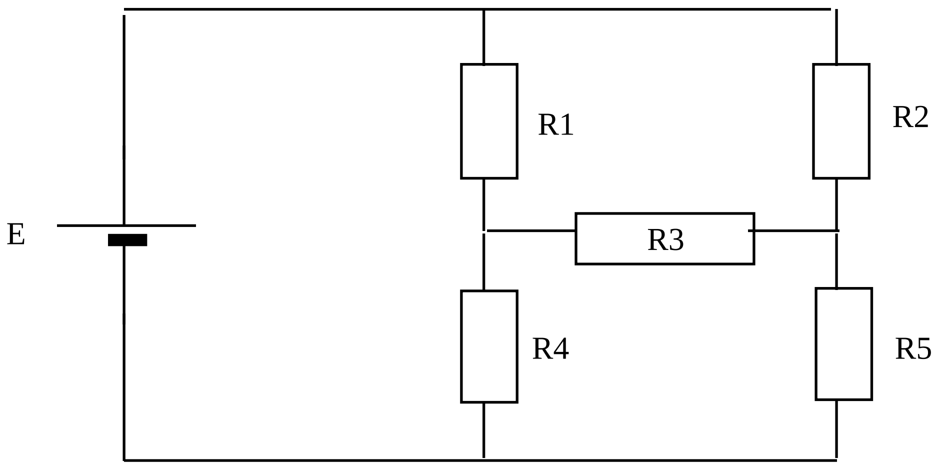
9V/2½ = 4,5A = stroom door de weerstand van 2½.

4,5A+1,5A = 6A = stroom door de stroombron = x.

De werkelijke stroom door de stroombron was 12A. Als we nu alle gevonden waarden vermenigvuldigen met 12A/6A bekomen we de werkelijke waarden. De stroom i is dus 1A.2 = 2A.

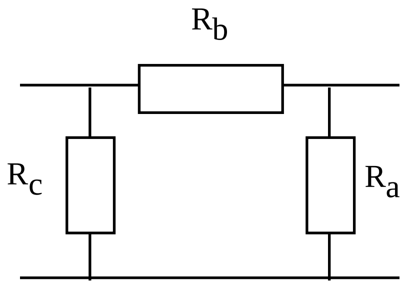
2.8. Ster-driehoek transformatie

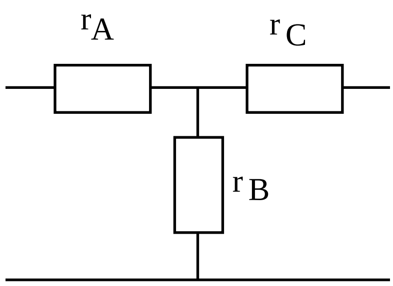
Beschouw het volgende netwerk. (Wheatstone-brug) Geen enkele van de weerstanden in dit netwerk staat in serie of in parallel met een andere!



Netwerken zoals dit kunnen niet rechtstreeks opgelost worden met de methode van de spanningsdeler of de stroomdeler, of via proportionaliteit. Om de methode toch te kunnen toepassen moeten we het netwerk transformeren tot een ander, ekwivalent netwerk dat wel oplosbaar is met deze methode. De ster-driehoektransformatie laat dit toe.

Formules:





$$R_a = r_C + r_B + \frac{r_C\, r_B}{r_A} \qquad r_A = \frac{R_b\, R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_b = r_A + r_C + \frac{r_A\, r_C}{r_B} \qquad r_B = \frac{R_a\, R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_c = r_A + r_B + \frac{r_A\, r_B}{r_C} \qquad r_C = \frac{R_a\, R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

Door de linker formules uit te schrijven in functie van conductanties $G = \dfrac{1}{R}$ bekomen we een symmetrische vorm:

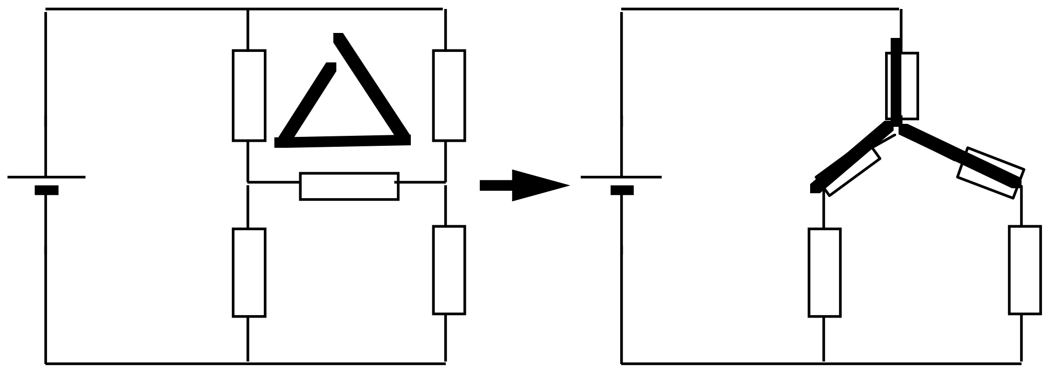
$$G_a = \frac{g_B \cdot g_C}{g_A + g_B + g_C}$$

$$G_b = \frac{g_A \cdot g_C}{g_A + g_B + g_C}$$

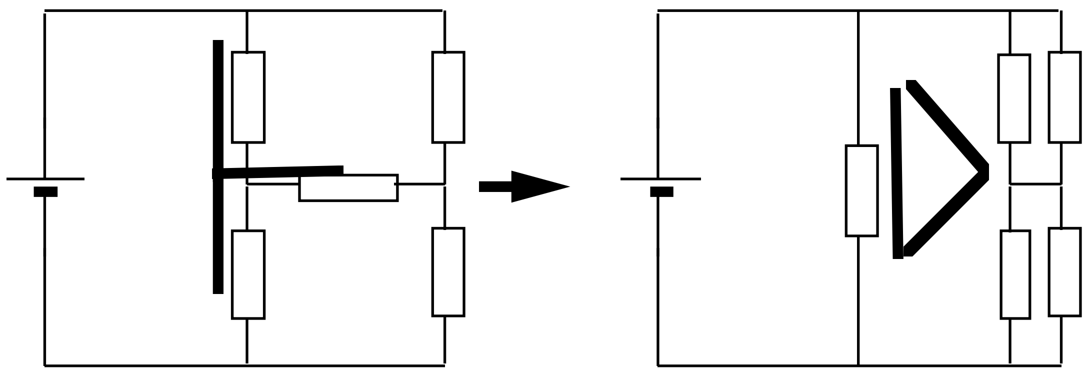
$$G_c = \frac{g_A \cdot g_B}{g_A + g_B + g_C}$$

Meestal zijn er voor hetzelfde netwerk alternatieve transformaties mogelijk. Dus eerst even nadenken alvorens te transformeren. Uiteraard is het niet verstandig juist dat stuk weg te werken waarin we de spanning of de stroom willen bepalen. (Merk op dat deze methode dus niet zo geschikt is om bv. alle stromen in een netwerk te bepalen, eerder om bv. de ekwivalente weerstand van een stuk netwerk te vinden.)

Wat nu het voorbeeld betreft, als we bijvoorbeeld één van de driehoeken vervangen door een ster, staan alle weerstanden in serie- of parallelschakelingen:



We hadden echter bijvoorbeeld ook evengoed kunnen een ster door een driehoek vervangen:



2.9. Superpositie

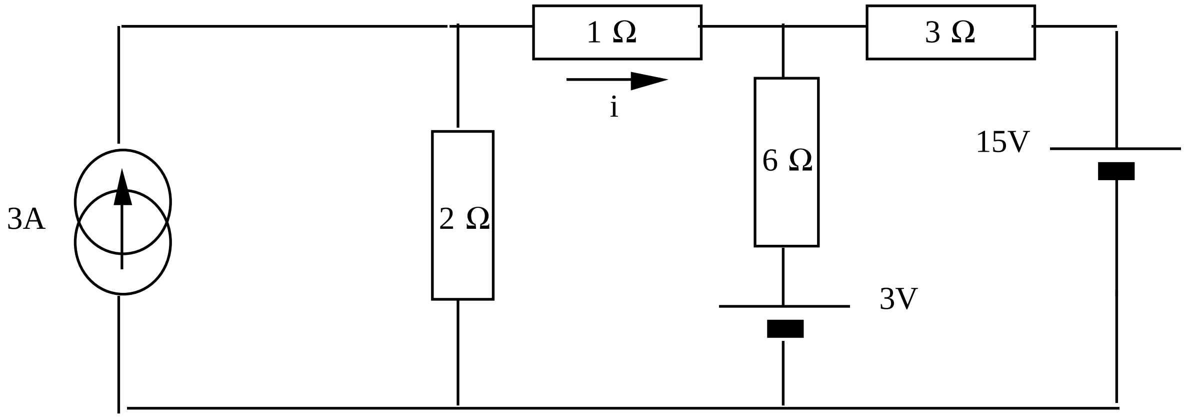
Ook bij netwerken met meerdere bronnen zijn de vorige methodes niet rechtstreeks toepasbaar. We lossen dit op door superpositie. We kunnen de bron in een netwerk beschouwen als "input" en de spanning of stroom die we zoeken als "output". Voor lineaire netwerken geldt dat als een input x_1 een output y_1 oplevert en een input x_2 een output y_2, dan zal een input $a.x_1 + b.x_2$ een output $a.y_1 + b.y_2$ leveren.

Meer fysisch, stel dat we een netwerk hebben met twee bronnen. We schakelen de eerste bron in en we meten de spanning over een bepaalde weerstand. Idem met de eerste bron uit en enkel de tweede bron aan. De som van de twee gemeten spanningen is dan de spanning die we zullen meten met de twee bronnen tegelijk aan.

Een spanningsbron die "af" staat levert spanning 0 en kunnen we dus vervangen door een kortsluiting. Een kortsluiting legt immers spanning nul op tussen de uiteinden. Een stroombron die "af" staat geeft stroom 0 en is dus ekwivalent met een open klem.

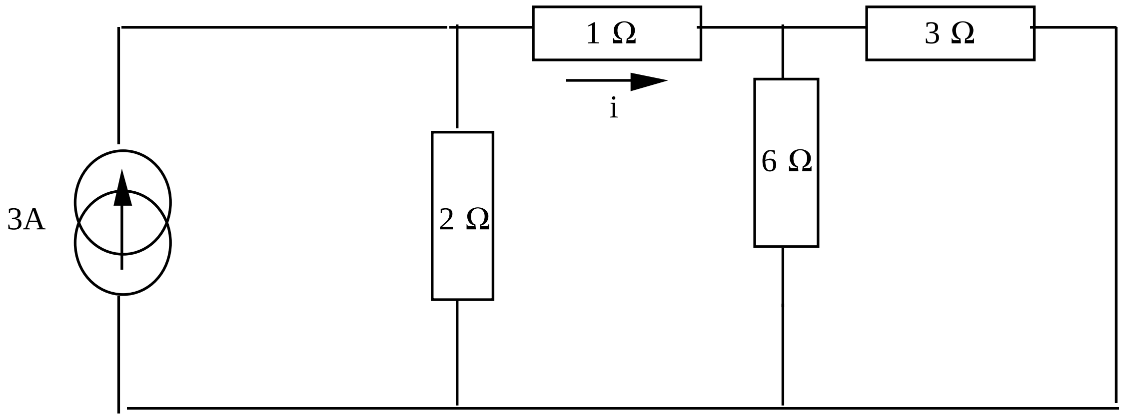
Voorbeeld:

Bepaal i in het volgende netwerk:



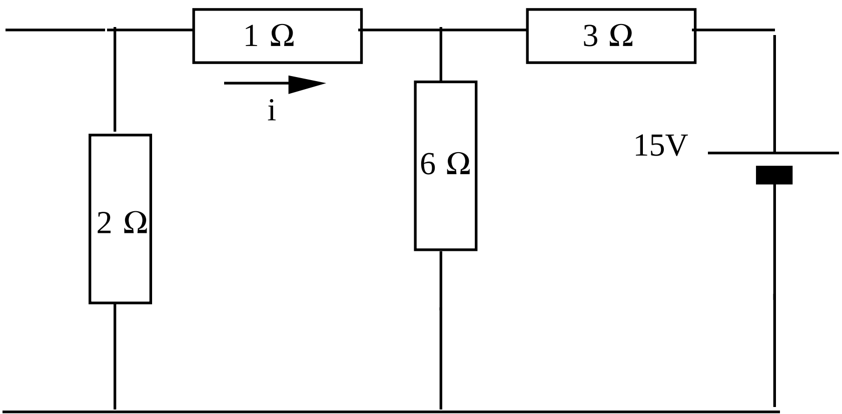
Er zijn 3 bronnen, we zullen dus 3 netwerken met 1 bron moeten oplossen.

Eerste netwerk:



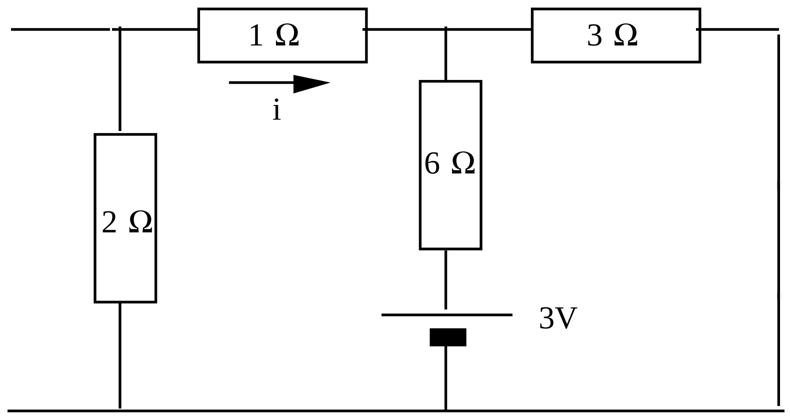
$$i = 6/5A$$

Tweede netwerk:



$$i = -2A$$

Derde netwerk:



i = -1/5A

(merk op dat het geen rol speelt met welke methode de deelnetwerken opgelost worden.)

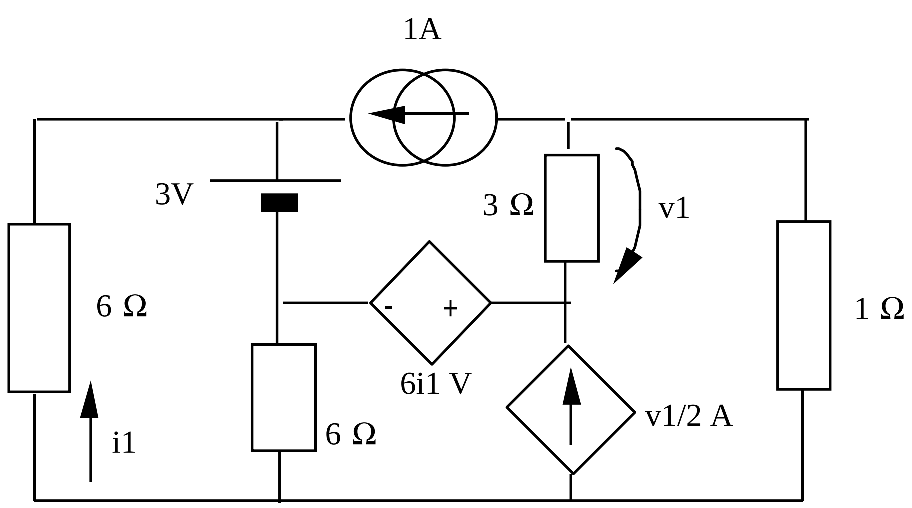
De stroom i in het volledige netwerk is de som van deze drie stromen:

i = 6/5A - 1/5A - 2A = -1A.

Dankzij superpositie kunnen we dus met de reeds geziene methodes een groot aantal netwerken oplossen. Voor elke bron in het netwerk moeten we een eenvoudiger netwerk oplossen. Als er veel bronnen zijn wordt dat vlug onaangenaam.

2.10. Afhankelijke bronnen

De superpositieregel geldt enkel voor onafhankelijke bronnen. Indien een netwerk ook afhankelijke bronnen bevat moeten we die altijd in rekening brengen. Dus superpositie geeft ons een apart netwerk voor elke onafhankelijke bron, dat tevens alle afhankelijke bronnen bevat. Dit is alleen oplosbaar voor zeer eenvoudige netwerken. Probeer maar eens op dit voorbeeld:

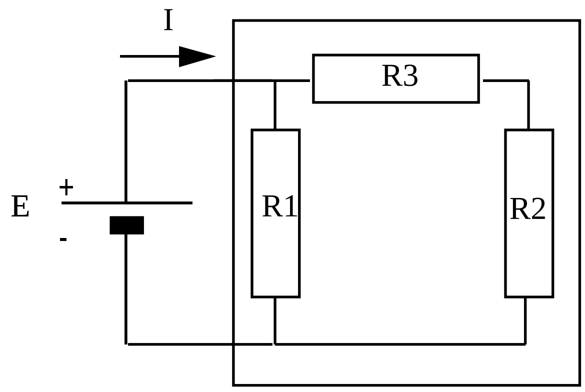


Gelukkig beschikken we over krachtiger methodes (zie verder).

2.11. Ekwivalente schema’s (Thevenin - Norton)

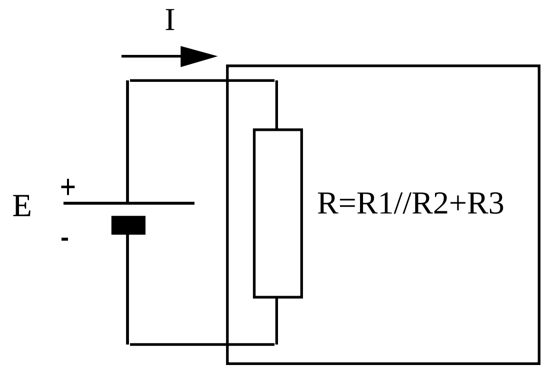
Het kan gebeuren dat we niet geïnteresseerd zijn in wat er gebeurt in een bepaald stuk van het netwerk. We willen alleen weten welke invloed dit stuk heeft op de rest van de wereld.

Voorbeeld:

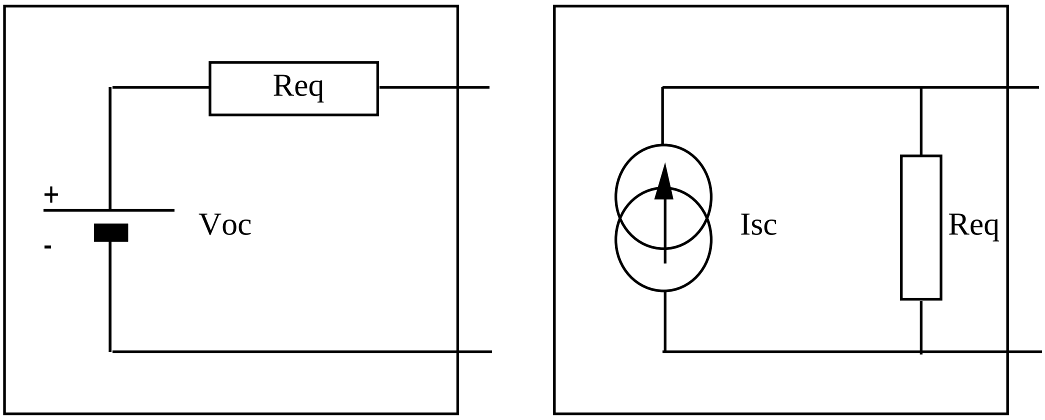


Om I te bepalen hoeven we alleen de ekwivalente weerstand van het omkaderd stuk te kennen. (De bedoeling is uiteraard dat het ekwivalent schema eenvoudiger op te lossen is.)

Ekwivalent schema:



We weten al hoe we netwerken met enkel weerstanden kunnen vervangen door een ekwivalente weerstand. De methodes van Thevenin en Norton laten toe een ekwivalent schema te bepalen van een willekeurig stuk netwerk, dus eventueel met bronnen erin. Deze ekwivalente schema's bestaan dan uit 1 bron en 1 weerstand.



Thevenin Norton

R_{eq} heeft dezelfde waarde in beide netwerken en wordt bepaald als de weerstand tussen de twee uitgangsklemmen als alle bronnen af staan (dus spanningsbron=kortsluiting, stroombron=open klem).

V_{OC} is de openklemspanning en I_{SC} is de kortsluitstroom (zie theorie).

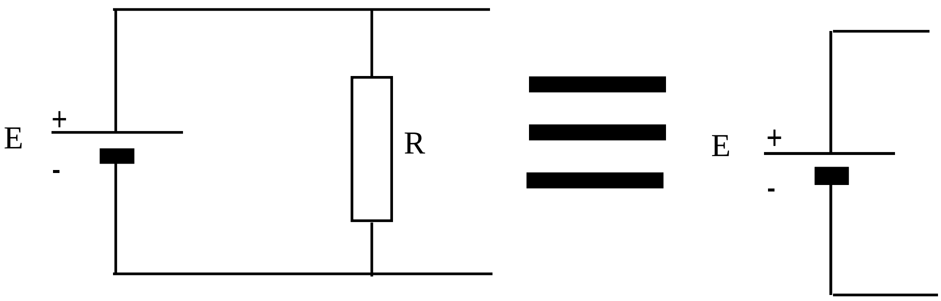
Tussen de beide schema’s bestaat de volgende betrekking:

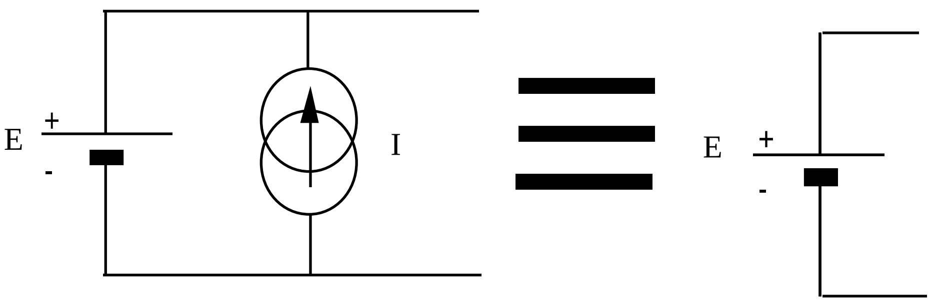
$$V_{oc} = R_{eq} \cdot I_{sc}$$

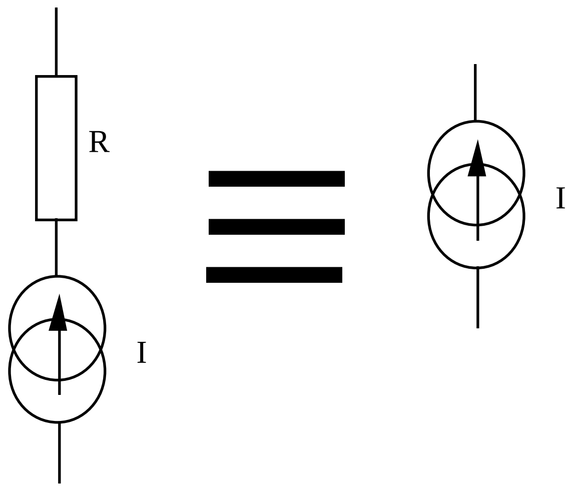
Om V_{OC} of I_{SC} te bepalen mag men eender welke berekeningsmethode toepassen.

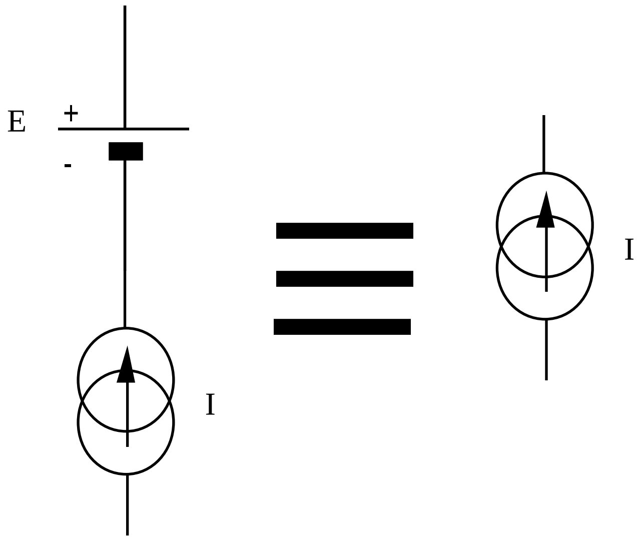
2.11.1. Een paar belangrijke ekwivalenties

De volgende vereenvoudigingen kan men zeer vaak "op het eerste zicht" toepassen. Ze zijn daarom de moeite van het onthouden waard.



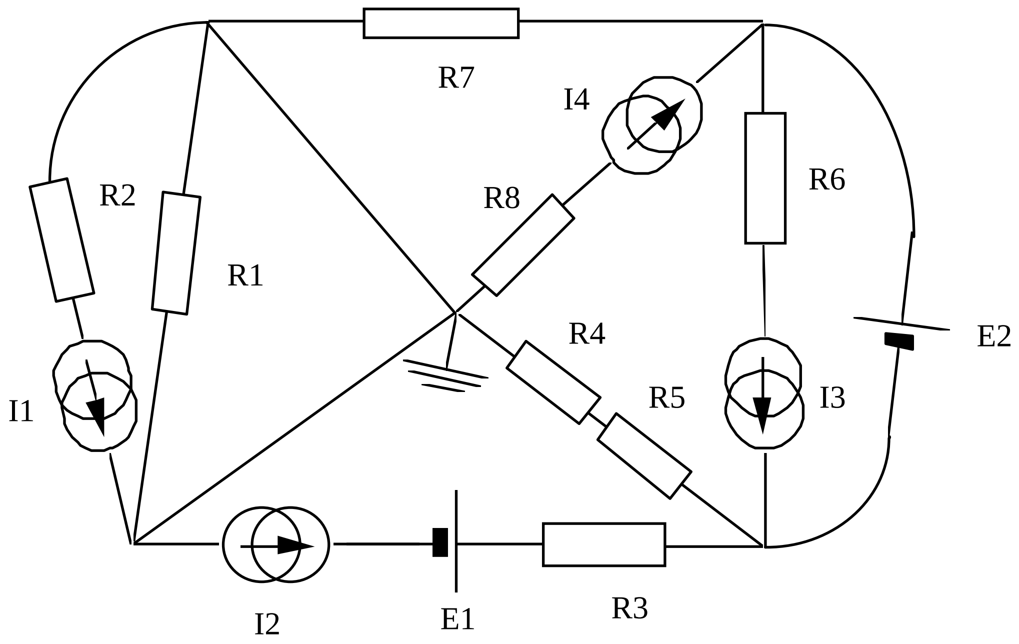




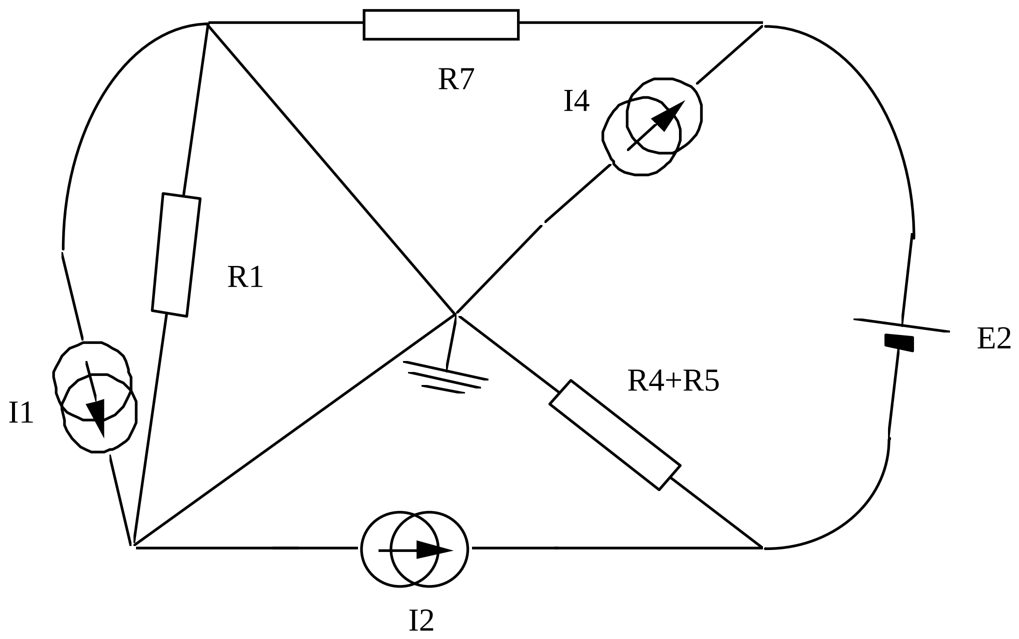


Deze ekwivalenties laten soms toe een netwerk aanzienlijk te vereenvoudigen. Ook kortsluitingen kunnen aanleiding geven tot vereenvoudiging. Aangezien een kortsluiting mag beschouwd worden als een spanningsbron van nul Volt, mogen takken in parallel ermee weggelaten worden.

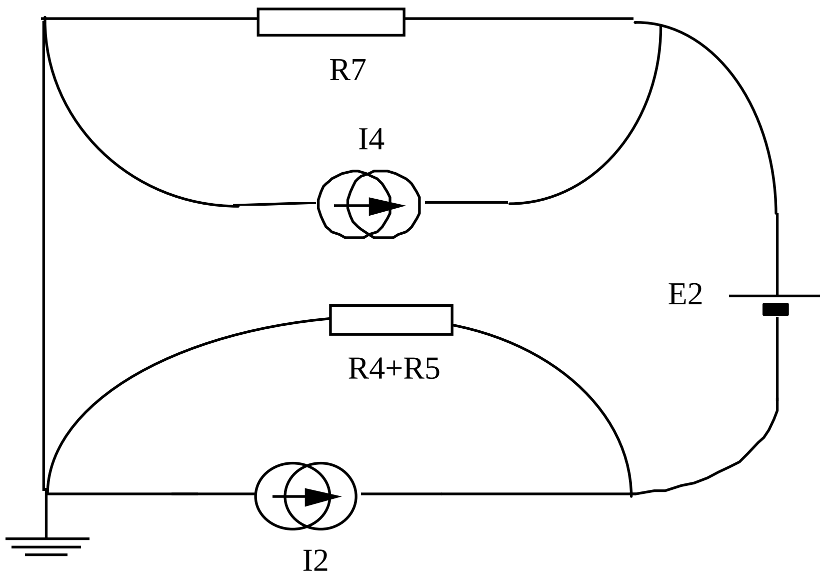
Voorbeeld:



is ekwivalent met:



of nog vereenvoudigd:



2.11.2. Een zeer belangrijke opmerking

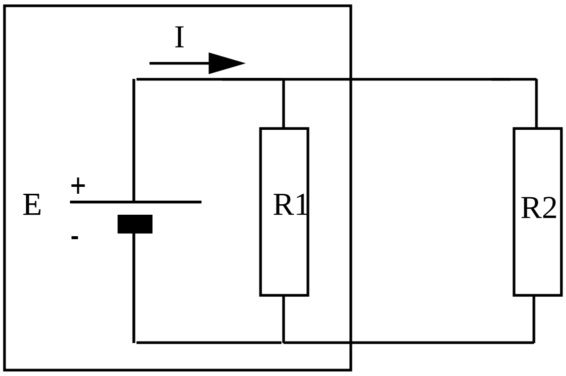
Bij het vereenvoudigen van netwerken is het wel belangrijk dat men niet het overzicht verliest. Men moet in staat blijven uit de oplossing van het eenvoudige netwerk, de oplossing van het oorspronkelijke netwerk te halen. Als men hier geen rekening mee houdt weet men tenslotte niet meer wat men berekend heeft.

Het oorspronkelijke netwerk is ook zonder vereenvoudiging perfekt oplosbaar. Meestal zal dit minder aanleiding tot verwarring geven. Probeer dit zelf eens met één van de methoden uit het volgende hoofdstuk.

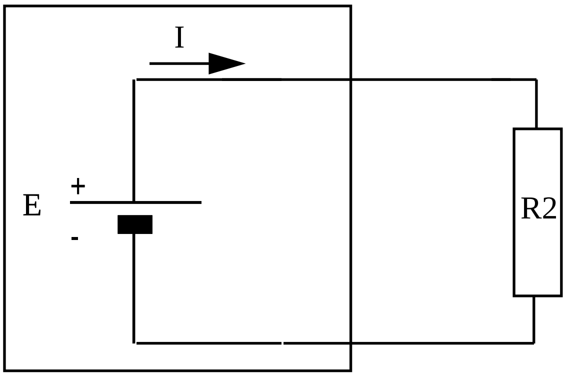
2.11.3. Nog een zeer belangrijke opmerking

Als we een stuk netwerk vervangen door zijn ekwivalent schema, ziet de rest van de wereld geen verschil. De REST van de wereld ziet geen verschil. Dit moet u goed begrijpen. Voor alle elementen binnen het te vervangen stuk netwerk kan het verschil zeer groot zijn.

Voorbeeld:



De stroom door de spanningsbron is $I = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_1}$. Als we het omkaderde stuk vervangen door zijn Thevenin equivalent:



De stroom door de spanningsbron is nu $I = \frac{E}{R_1}$.

Dit betekent dat het in feite onmogelijk is de werkelijke waarden van spanning, stroom of vermogen te bepalen in een stuk netwerk dat vereenvoudigd werd.

3. Maasstromen-knoopspanningen

In dit deel worden een paar oplossingsmethodes voorgesteld die rechtstreeks gebruik maken van de wetten van Kirchhoff en de wet van Ohm. Deze wetten worden voor een bepaald netwerk uitgeschreven onder de vorm van een stelsel van vergelijkingen. Deze methodes hebben dus het "nadeel" dat er een stelsel moet opgelost worden, waar dit bij de vorige methodes niet zo was. (In deze tijd van zakrekenmonsters heeft dit niet meer zoveel belang.)

Voor een gegeven netwerk zijn de onbekenden op het eerste gezicht de spanning over elk element en de stroom door elk element. (We zullen werken met takstromen omdat de stroom dezelfde is voor alle elementen in dezelfde tak.) De twee wetten van Kirchhoff en de wet van Ohm geven ons drie reeksen betrekkingen tussen deze onbekenden. Het is mogelijk al deze vergelijkingen uit te schrijven voor een gegeven netwerk, en het stelsel op te lossen.

Er zijn echter twee gebruikelijke methodes die het op te lossen stelsel sterk vereenvoudigen, door één der twee onbekenden reeds tijdens het opstellen van de vergelijkingen te elimineren: de methode maasstromen en de methode der knoopspanningen.

3.1. Methode der maasstromen

Voor het bepalen van het aantal onafhankelijke lussen of mazen en de keuze van de maasstromen maken we gebruik van een topologische techniek. We maken eerst een graf-voorstelling van het netwerk. (Onthou dat kortsluitingen geen takken zijn.)

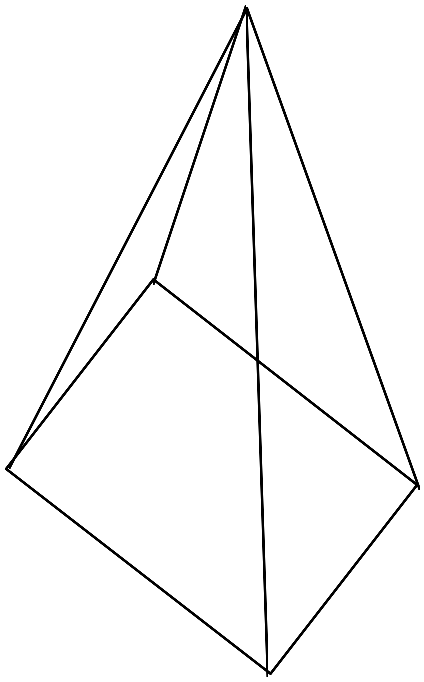
In de graf kiezen we nu een boom. Een boom is een verzameling takken van de graf, die aan drie voorwaarden voldoen:

-de takken vormen geen enkele lus

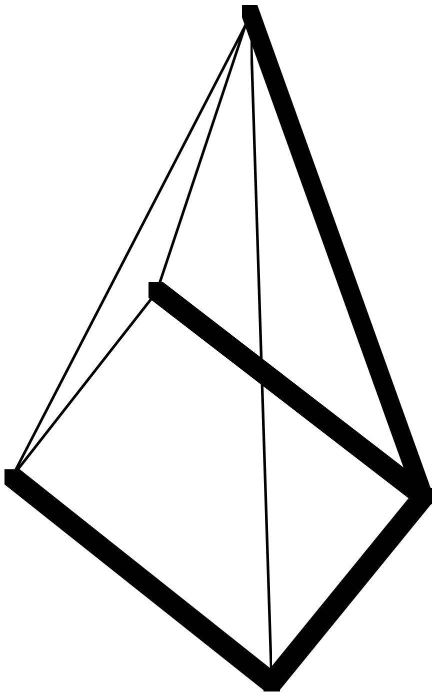
-er kunnen niet meer takken bij de boom gevoegd worden zonder een lus te vormen

-de takken van de boom vormen een samenhangend geheel.

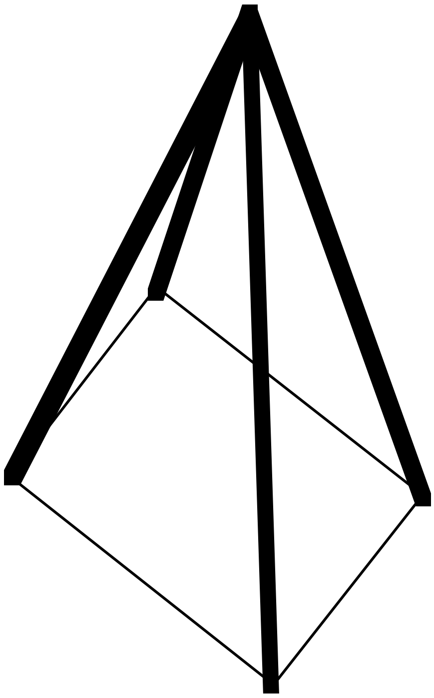
Er zijn meestal meerdere bomen mogelijk in een graf. Elke mogelijke boom voor een graf bevat echter evenveel takken. Er zijn dus ook altijd evenveel takken die niet bij de boom horen. Deze takken noemt men lianen. Als men een liaan bij de boom voegt, ontstaat er een lus. Voor elke liaan van een boom kunnen we zo een lus vinden. Als we met elk van de zo gevonden lussen een lusstroom associeren, hebben we het juiste aantal lusstromen om het netwerk op te lossen. Door het gebruik van de boom-techniek geven deze lussen ook onafhankelijke vergelijkingen. Met willekeurig gekozen lussen is dit niet gegarandeerd.



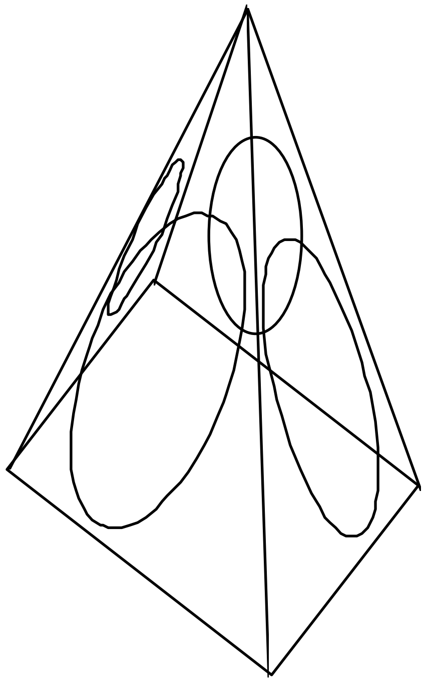
Voorbeeld van een graf



Dit is een boom



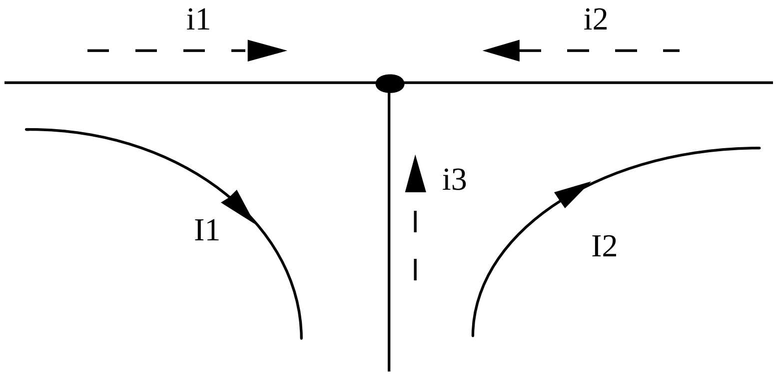
Dit is een andere boom



Lussen bij de tweede boom

Bij de maasstroom methode drukken we de KVL-wet uit over alle onafhankelijke mazen (=lussen) van het netwerk. Door het gebruik van maasstromen in plaats van takstromen is automatisch voldaan aan de KCL-wet:

Vb:



De takstromen in funktie van de maasstromen zijn:

$i_1 = I_1$

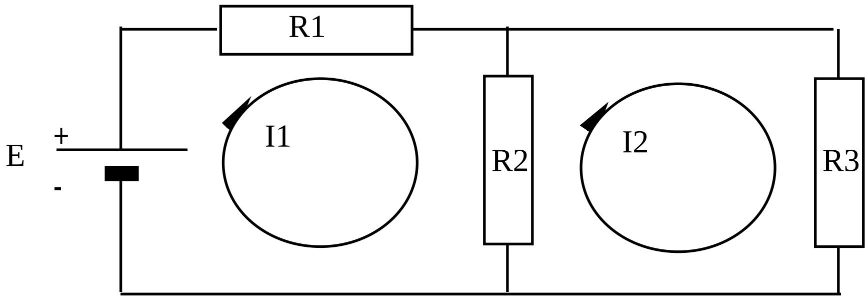
$i_2 = -I_2$

$i_3 = I_2 - I_1$

De KCL wet in de knoop zegt dat $i_1+i_2+i_3=0$ moet zijn. Merk op dat hieraan automatisch voldaan is. Dit geldt eveneens voor een andere keuze van maasstromen.

We drukken uit dat de som van de spanningen over elke maas nul is. Dit geeft evenveel vergelijkingen als er onbekende maasstromen zijn.

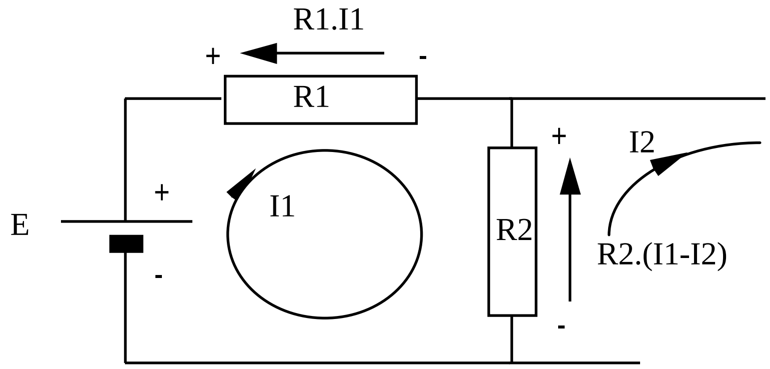
Vb.



De oriëntatie van de maasstromen is vrij te kiezen.

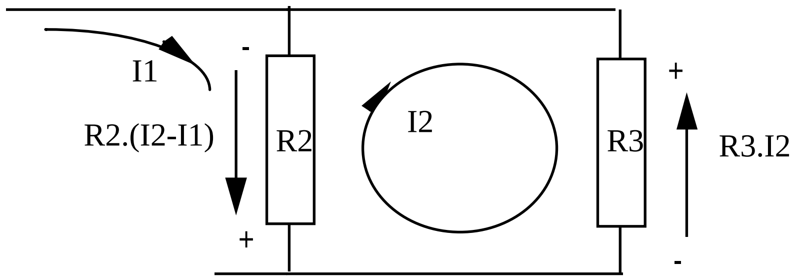
We stellen nu de som van de spanningen over elke maas gelijk aan nul. De gebruikelijke werkwijze is de spanning positief te tellen als ze daalt in de richting van de maasstroom (dus van + naar -).

Voor maas 1 wordt dit:



$$-E + R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot (I_1 - I_2) = 0$$

Voor maas 2:



$$R_3 \cdot I_2 + R_2 \cdot (I_2 - I_1) = 0$$

Dit geeft het stelsel:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2) I_1 - R_2 I_2 = E \\ -R_2 I_2 + (R_2 + R_3) I_2 = 0 \end{cases}$$

of:

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2) & -R_2 \\ -R_2 & (R_2 + R_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}$$

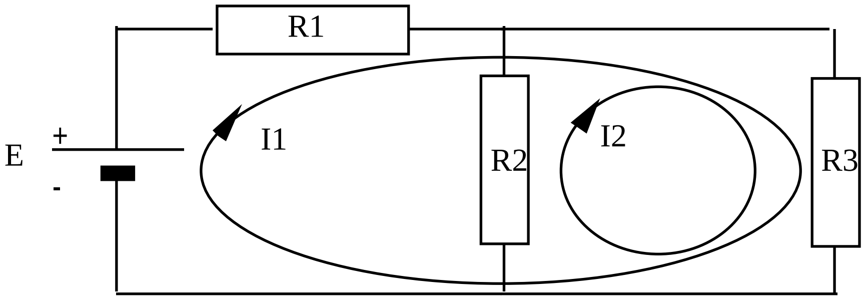
De vorm $[R] \cdot [I] = [U]$ kunnen we ook rechtstreeks opstellen .

R_{ii} = som van de weerstanden in lus i

Rij = som van de weerstanden gemeenschappelijk aan lussen i en j. Een weerstand wordt positief geteld als de maasstromen i en j er in dezelfde zin doorstromen.

E_i = som van de spanningsbronnen in lus i, positief als de spanning toeneemt volgens de zin van maasstroom i. (Andersom als daarnet omdat het nu in het andere lid staat)

Merk op dat een andere keuze van maasstromen, bv.



andere vergelijkingen en andere waarden voor de maasstromen levert. De TAKstromen die men uit de maasstromen berekend moeten echter dezelfde zijn.

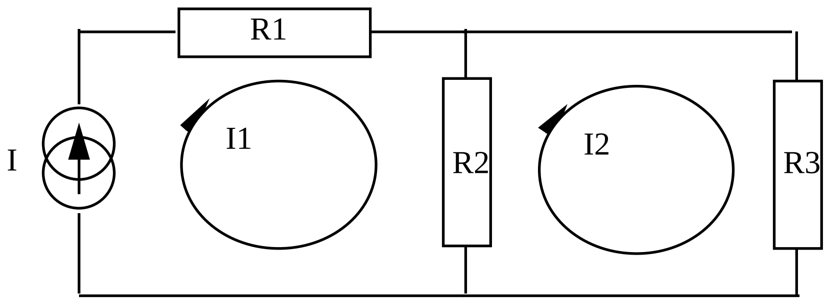
3.1.1.

We kunnen de spanning over een stroombron niet schrijven in funktie van de maasstromen. Over een lus met een stroombron erin kunnen we de som van de spanningen niet maken.

3.1.1.1 **Oplossing 1**

we hoeven die vergelijking ook niet op te stellen, want we kennen de stroom al. Die is namelijk opgelegd door de stroombron.

Vb.



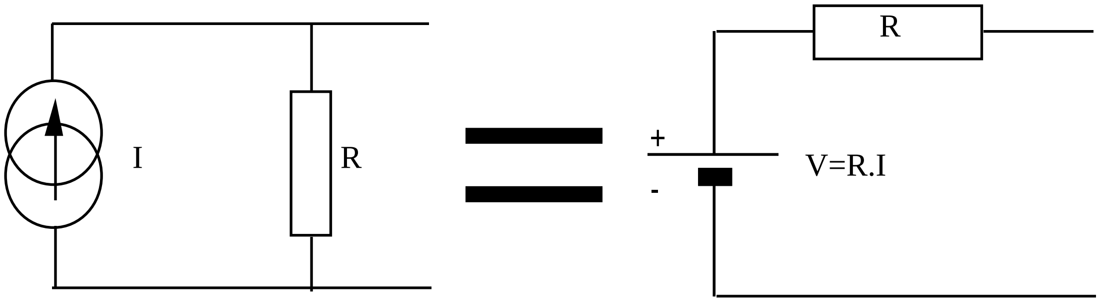
Lus 1 : $I_1 = I$ (I is de gekende stroom van de stroombron)

Lus 2 : $R_2(I_2 - I) + R_3 I_2 = 0$

Om dit te kunnen toepassen moeten we onze maasstromen zodanig kiezen dat door elke stroombron juist één van de maasstromen loopt. Dit doen we door onze boom zodanig te kiezen dat er geen takken met stroombronnen tot de boom behoren.

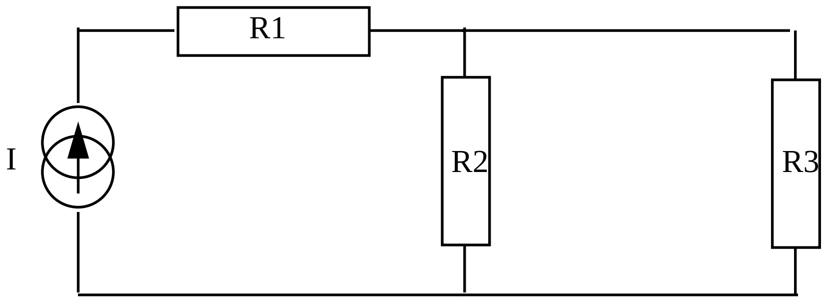
3.1.1.2 **Oplossing 2**

We gaan de stroombronnen vervangen door hun Thevenin-equivalent.

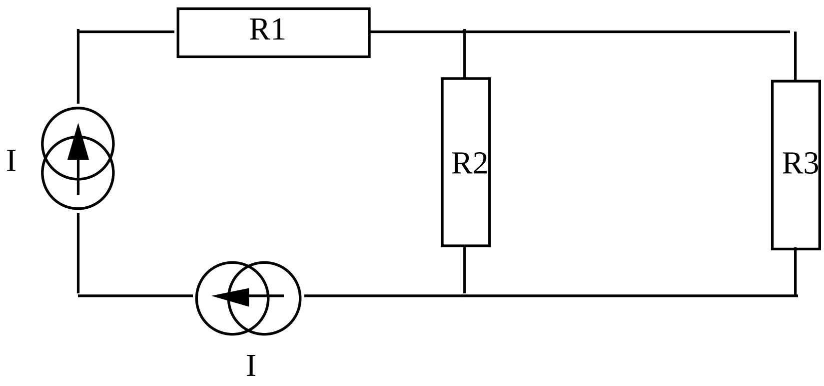


Als niet alle stroombronnen in parallel staan met een weerstand, zullen we de topologie van het netwerk moeten wijzigen. De methode die hiervoor toegepast wordt heet de I-shift methode.

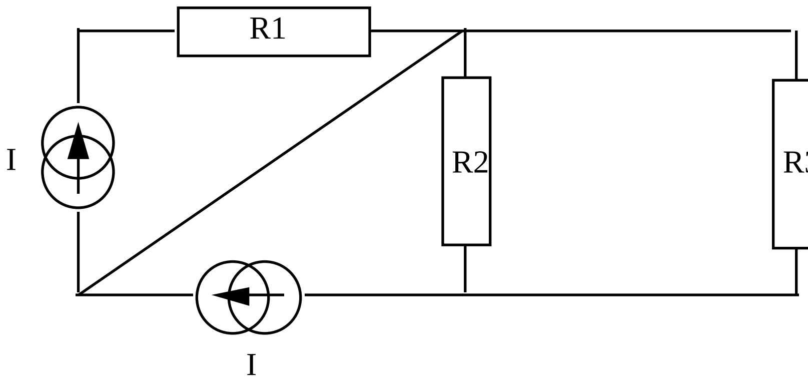
Vb.



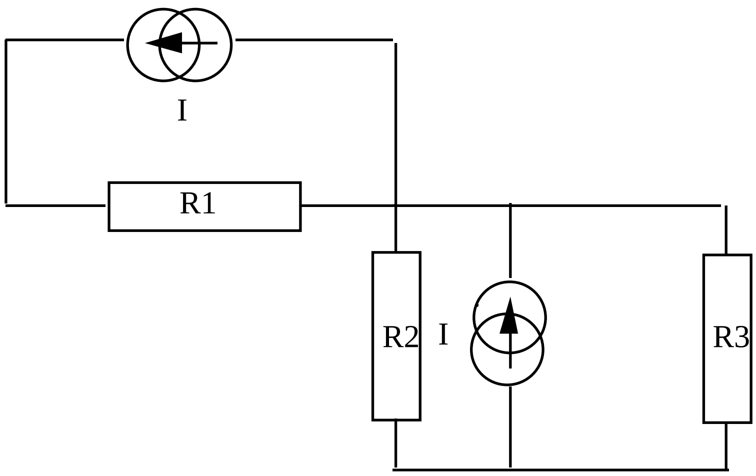
De stroombron I is equivalent met twee stroombronnen met stroom I in serie.



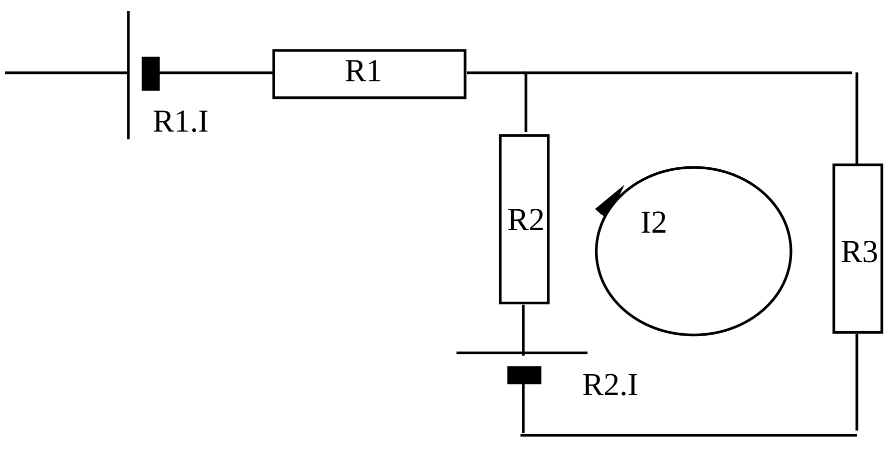
Als we het punt tussen de twee stroombronnen verbinden met een willekeurig punt van het netwerk heeft dat geen invloed op de spanningen of stromen in het netwerk. Immers, de stroom door deze nieuwe lijn is nul. Dit volgt uit de KCL-vergelijking in het punt tussen de twee stroombronnen ($i_{nieuw} = I - I$). De spanning van het willekeurige punt wordt ook niet aangetast, want we weten dat de spanning over de stroombronnen zich aanpast.



(De lezers die vinden dat dit nogal bij de haren getrokken is, hebben groot gelijk.)



We zien dat nu alle stroombronnen WEL in parallel met een spanningsbron staan. Ze kunnen dus door hun Thevenin-equivalent vervangen worden.

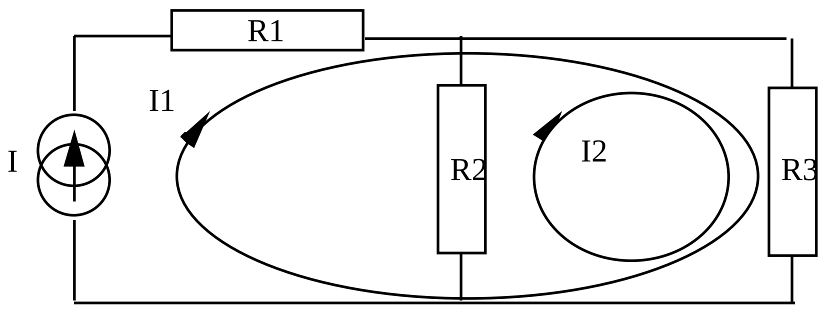


We hebben nu een lus waarover we de lusvergelijking kunnen uitschrijven. Dit geeft: $R_2 I_2 + R_3 I_2 - R_2 I = 0$. Merk op dat dit identiek dezelfde vergelijking is als gevonden bij oplossing 1.

3.1.1.2.1 Belangrijke opmerkingen bij de I-shift methode

Merk op dat de topologie van het netwerk veranderd is. Door de weerstand R_1 loopt in het laatste netwerk geen stroom meer, terwijl we heel goed weten dat de stroom door R_1 gelijk aan I was. Wie wat beter kijkt zal zien dat ook de stroom door R_2 in het gewijzigde netwerk niet de werkelijke stroom is. Dit komt omdat R_1 en R_2 betrokken zijn geweest in een Norton-Thevenin transformatie, en daardoor in zekere zin niet meer dezelfde elementen zijn.

Merk tevens op dat in de voorlaatste stap we net zo goed de parallelschakeling van de stroombron met R_3 hadden kunnen vervangen door het Thevenin-ekwivalent. In dat geval was de vergelijking geweest: $R_2 I_2 + R_3 I_2 + R_3 I = 0$. Dit is de vergelijking die we zouden bekomen als we oplossingsmethode 1 zouden toepassen met als maasstromen:

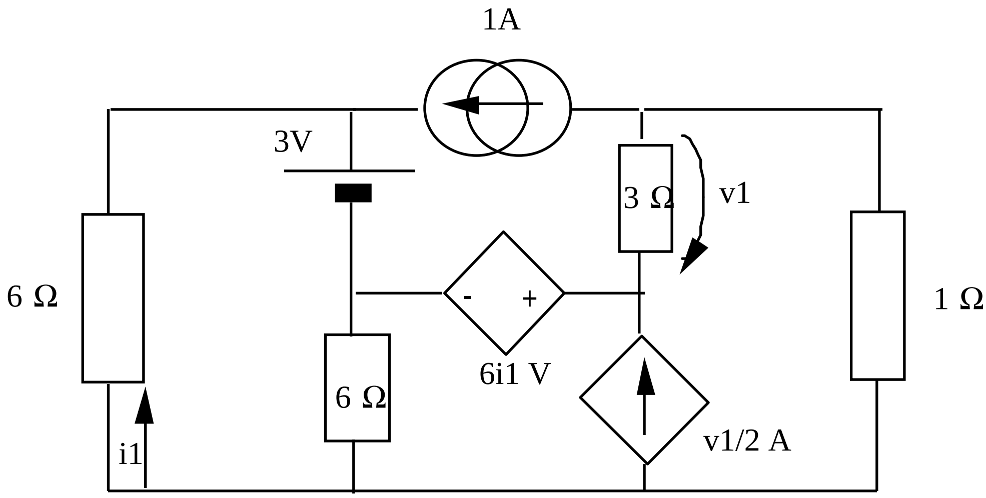


Merk op dat het na toepassing van de I-shift allesbehalve evident is welke stromen U nu eigenlijk berekend heeft, en wat het verband is tussen de opgave en de oplossing. Dit komt vooral doordat de topologie van het netwerk gewijzigd is. Besluit hieruit dat de I-shift methode meer iets is om een computeranalyse van netwerken te implementeren.

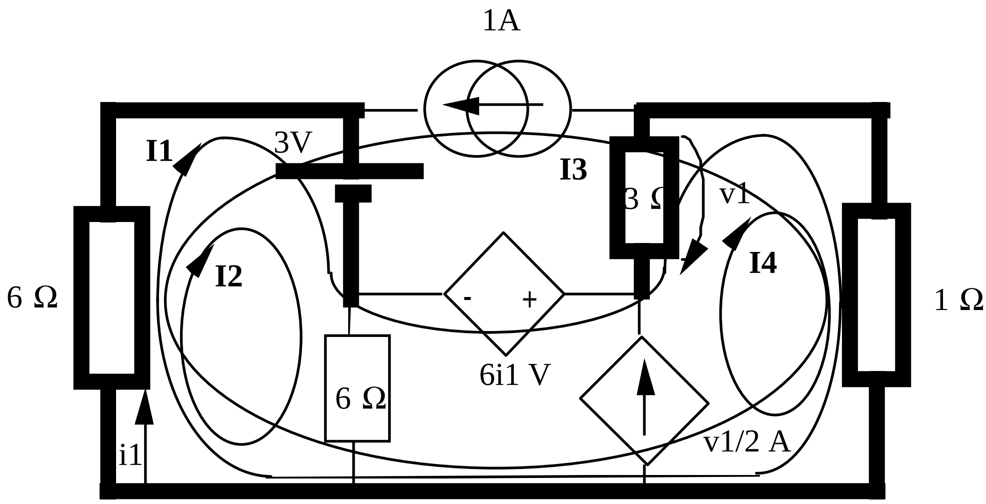
3.1.5. Afhankelijke bronnen

Om een netwerk met afhankelijke bronnen op te lossen met de methode der maasstromen, gaan we als volgt te werk. We kiezen onze maasstromen zoals voor ’gewone’ onafhankelijke bronnen. De afhankelijke stroombronnen bv. verdienen dezelfde behandeling als normale stroombronnen. Vervolgens gaan we de waarde van de afhankelijke bronnen uitdrukken in funktie van de maasstromen. Voor stroomgestuurde bronnen zal dit geen probleem stellen. Voor spanningsgestuurde bronnen moeten we de spanning schrijven als funktie van de maasstromen. Bv. de spanning over een weerstand volgt uit de stroom door die weerstand en de wet van Ohm.

Vb.



We kiezen een boom waartoe geen stroombronnen behoren, bv:



Er zijn vier mazen in het netwerk. We hebben onze maasstromen zodanig gekozen dat door elke stroombron juist 1 maasstroom loopt.

We hebben één stroomgestuurde spanningsbron met spanning $6i_1$ V. Met de gegeven keuze van maasstromen is $i_1=I_1+I_2-I_3$. Dus de spanning van de spanningsbron is $6(I_1+I_2-1A)$V. We hebben ook een spanningsgestuurde stroombron met spanning $v_1/2$ A. We zien dat met onze maasstromen $v_1 = 3\Omega \cdot (I_4 + I_1)$ V. Dus de stroom van de stroombron is $\frac{3}{2} \cdot (I_4 + I_1)$ A. We kunnen nu de vergelijkingen voor de maasstroommethode opstellen zoals eerder besproken.

We zien dat I_3 door een stroombron van 1A loopt, dus I_3 = 1A.

Analoog is $I_4 = \frac{3}{2} \cdot (I_4 + I_1)$ A, of $I_4 = -3I_1$ A.

We moeten nu nog de spanningsvergelijkingen uitschrijven over lus 1 en lus 2.

$$\begin{cases} 6(I_1 + I_2 - 1) + 3 + 6I_2 = 0 \\ 6(I_1 + I_2 - 1) + 3 - 6(I_1 + I_2 - 1) + 3(-2I_1) + (-2I_1 - 1) = 0 \end{cases}$$

In matrixvorm geeft dit:

$$\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Merk op dat de Z-matrix niet meer symmetrisch is. Dit is normaal voor netwerken met afhankelijke bronnen. De elementen in de Z-matrix zijn ook niet meer de som van impedanties in de lussen etc.

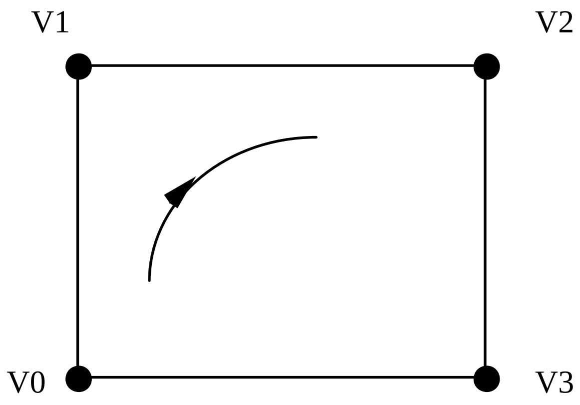
Bedenk eens een netwerk waarbij het onmogelijk is de afhankelijke brontermen uit te schrijven in funktie van de maasstromen. Mediteer ook eens over het geval van niet-lineair afhankelijke bronnen.

3.2. Methode der knoopspanningen

Hier kiezen we als onbekenden de spanningen in de knopen (zie cursus voor definitie van knoop). De vergelijkingen bekomen we door de KCL-wet uit te drukken in elke knoop (som van de stromen in een knoop is nul).

Door het gebruik van knoopspanningen is automatisch voldaan aan de KVL-wet.

Immers, de uitdrukking van de KVL-wet over een lus zal altijd van een vorm zijn zoals in het voorbeeld van de graf-voorstelling hieronder .



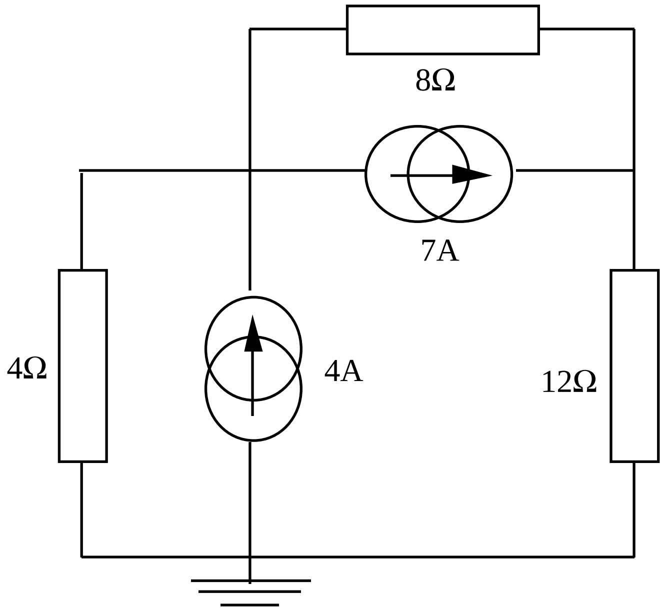
Namelijk, $(V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + (V_3 - V_0) = 0$ en dit leert ons niets nieuws.

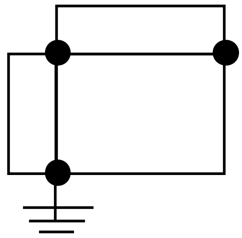
Wat kiezen we nu als knopen? In een graf-voorstelling van het netwerk zijn de knopen de punten waar meer dan twee takken samenkomen. Deze knopen zijn VOLDOENDE om een oplosbaar stelsel te bekomen. (zie cursus voor meer uitleg.) We kunnen altijd meer knopen kiezen op andere punten waar we de spanning willen bepalen.

Alle spanningen zijn uitgedrukt ten opzichte van één referentieknoop. De keuze van de referentieknoop is vrij, maar als er een geaarde knoop is nemen we die als referentie.

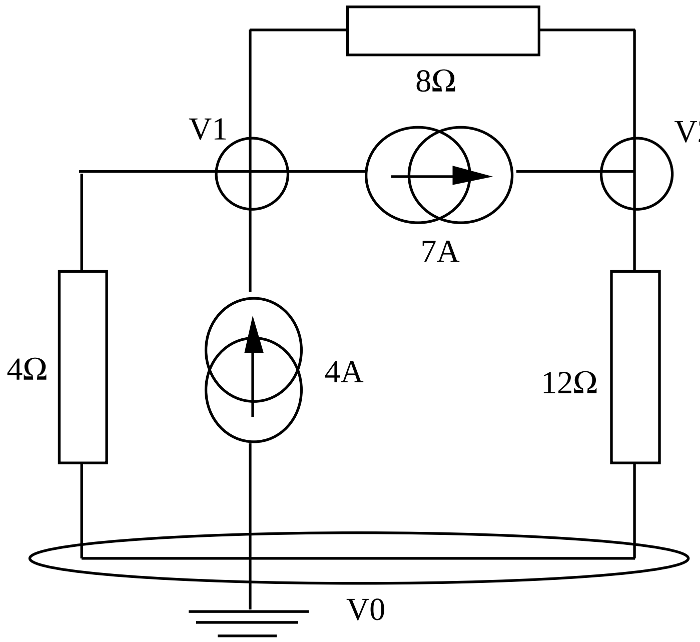
Door de som van de stromen nul te stellen in elke knoop (behalve de referentie) bekomen we evenveel vergelijkingen als onbekenden.

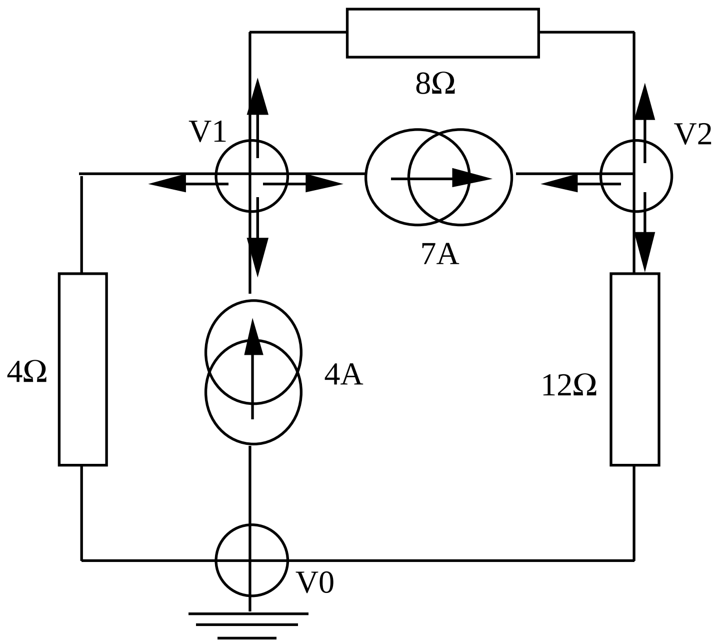
Vb.





Er zijn drie knopen, waarvan één referentie. Dus twee vergelijkingen.





Uit knoop 1 vertrekken vier stromen. De som van deze stromen moet nul zijn:

$$\frac{V_1}{4} - 4 + 7 + \frac{V_1 - V_2}{8} = 0$$

Uit knoop 2 vertrekken drie stromen:

$$\frac{V_2}{12} - 7 + \frac{V_2 - V_1}{8} = 0$$

Onder matrixvorm geeft dit:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} + \frac{1}{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

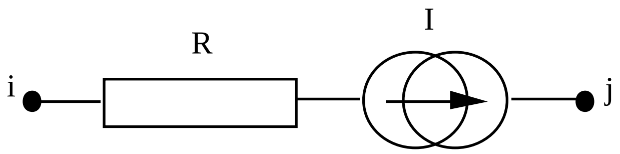
De vorm $[Y] \cdot [V] = [I]$ kunnen we ook rechtstreeks opstellen.

Y_{ii} = som van de conductanties die raken aan knoop i

Y_{ij} = - de som van de conductanties tussen knoop i en j

I_i = som van de stroombronnen die naar knoop i stromen

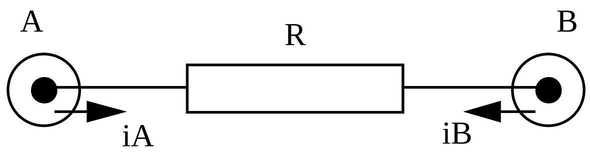
Opmerking: een veel gemaakte fout bij die rechtstreekse methode is de regeltjes toe te passen zonder nadenken. Mediteer over de invloed van de weerstand R op de [Y]-matrix voor de onderstaande tak:



Wat is de conductantie van de stroombron?

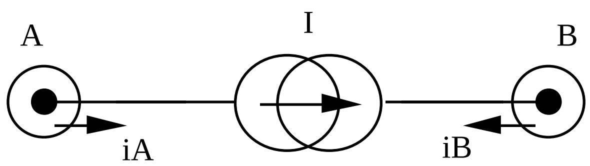
3.2.1. Bijdragen van verschillende elementen tot de som van de stromen in een knoop.

3.2.1.1.



$i_A = \dfrac{V_A - V_B}{R}$ en $i_B = \dfrac{V_B - V_A}{R}$.

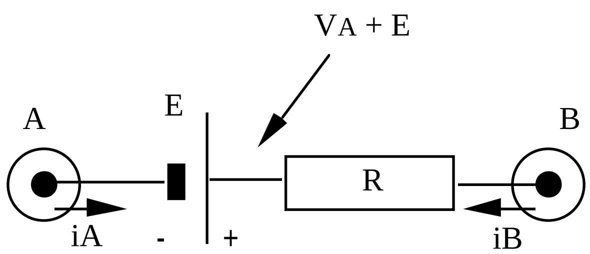
3.2.1.2.



$i_A = I$ en $i_B = -I$.

Het was te verwachten dat spanningsbronnen bij deze methode moeilijkheden veroorzaken. We kennen immers de stroom door een spanningsbron niet.

3.2.1.3.

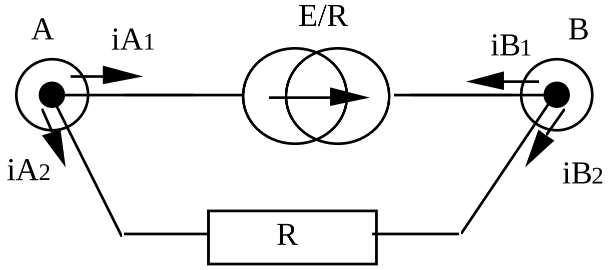


We kennen de spanning over weerstand R en dus ook de stroom erdoor. Dus

$$i_A = \frac{(V_A + E) - V_B}{R}$$

$$i_B = \frac{V_B - (V_A + E)}{R}$$

Alternatief kunnen we in dit geval ook het Norton ekwivalent opstellen:

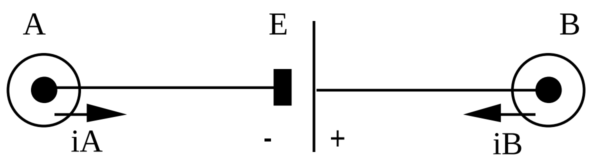


$$i_{A1} + i_{A2} = \frac{E}{R} + \frac{V_A - V_B}{R}$$

$$i_{B1} + i_{B2} = -\frac{E}{R} + \frac{V_B - V_A}{R}$$

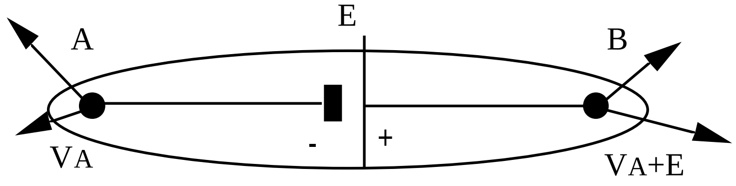
Dit geeft uiteraard dezelfde vergelijkingen.

3.2.1.4.

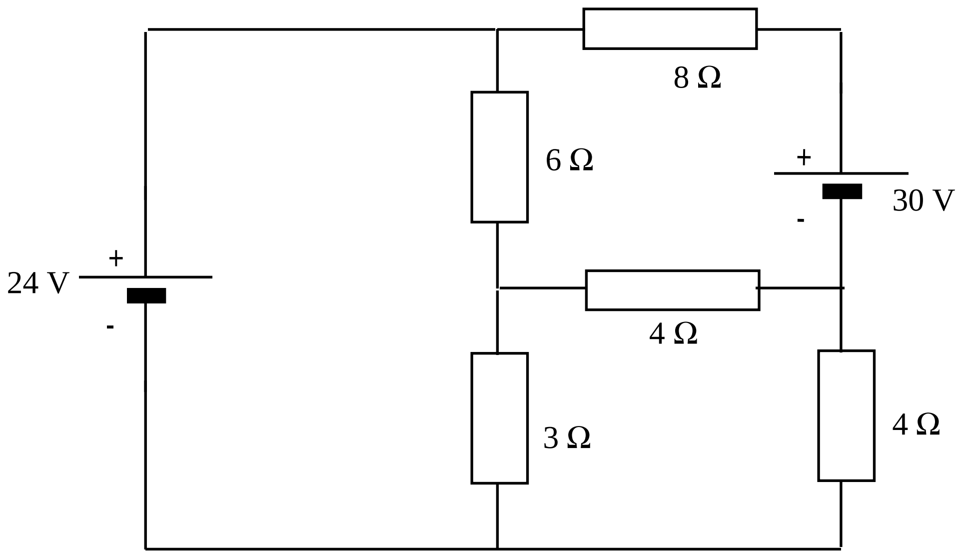


Dit lijkt lastig, omdat we van de ideale spanningsbron geen stroombron-equivalent kunnen bepalen. Maar we weten wel dat $V_B=V_A+E$. We hoeven voor deze twee knopen maar één vergelijking op te stellen. Dit is alsnog mogelijk.

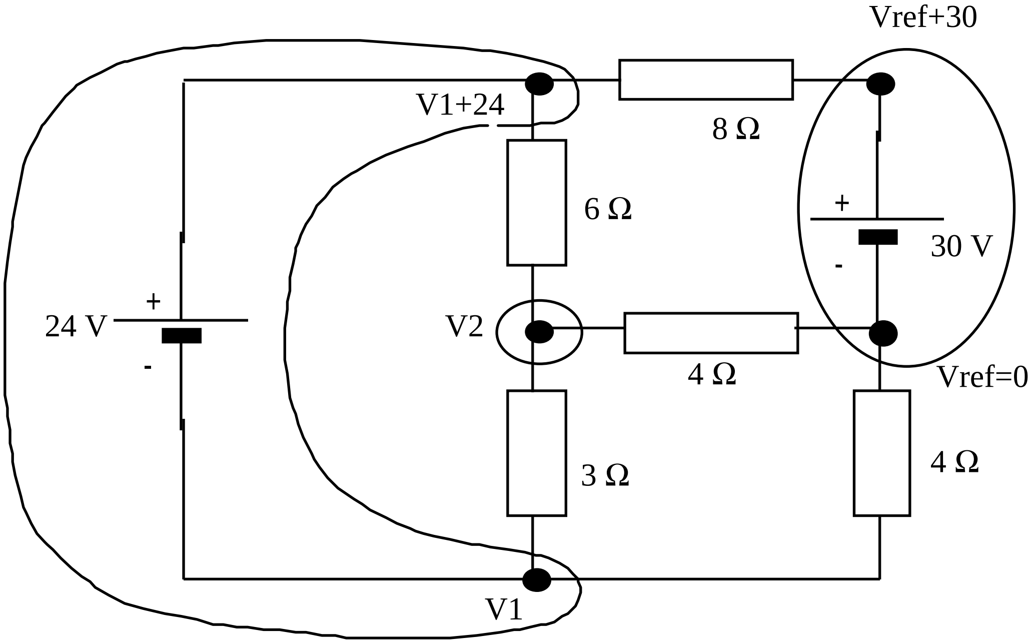
De som van alle stromen is niet enkel nul in een knoop, maar in elk gesloten volume. In plaats van de som van de stromen uit te drukken in knoop A of B, gaan we dit doen voor een volume dat meerdere knopen omvat. Als alle knopen in het volume verbonden zijn door ideale spanningsbronnen, hoeven we van slechts één knoop in het volume de knoopspanning te bepalen, om alle knoopspanningen in het volume te kennen.



Vb:

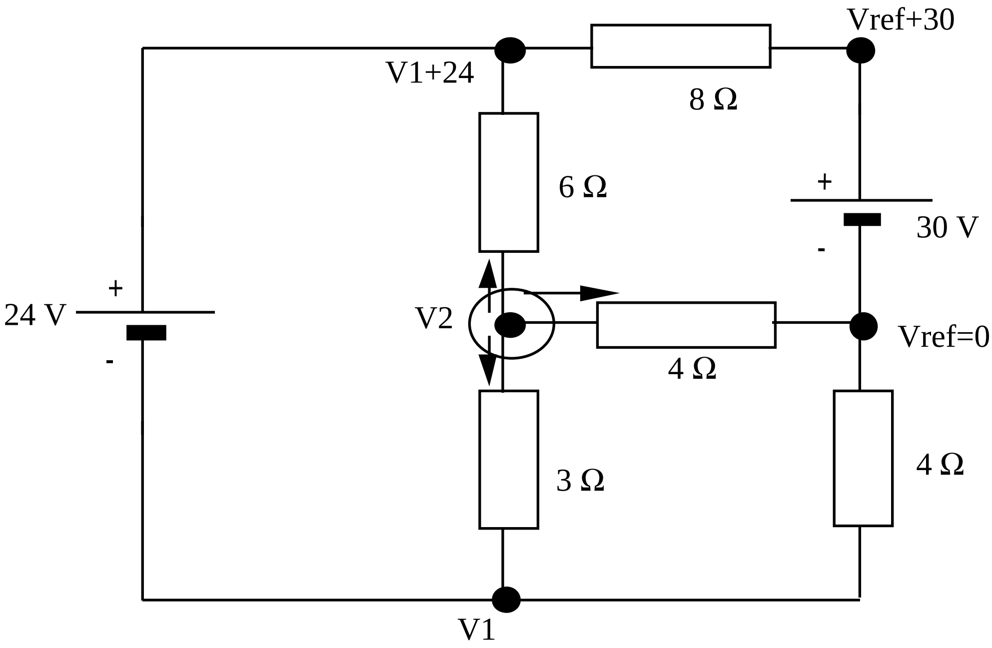


Naast de referentieknoop zijn er nog twee "superknopen", met als onafhankelijke knoopspanningen V_1 en V_2.



De vergelijkingen zijn:

$$\frac{V_1}{4} + \frac{V_1 - V_2}{3} + \frac{(V_1 + 24) - V_2}{6} + \frac{(V_1 + 24) - 30}{8} = 0$$

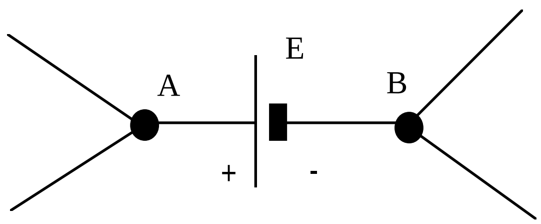


$$\frac{V_2}{4}+\frac{V_2-V_1}{3}+\frac{V_2-(V_1+24)}{6}=0$$

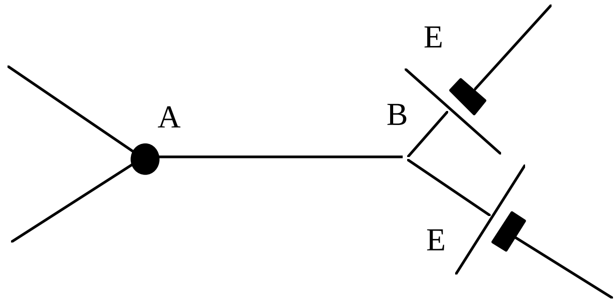
3.2.1.4.1.

In deze methode gaan we het netwerk wijzigen zodat alle spanningsbronnen in takken met weerstanden terechtkomen, en vervolgens vervangen kunnen worden door een Norton-ekwivalent.

Net als bij de I-shift verandert de topologie van het netwerk, en is het niet zo duidelijk welke spanningen uiteindelijk berekend werden.

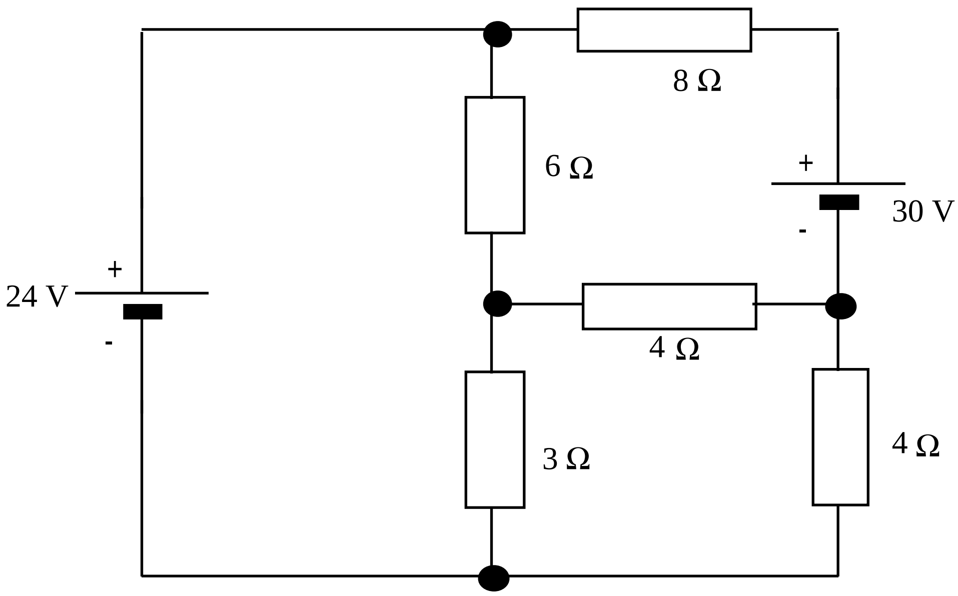


is ekwivalent met:

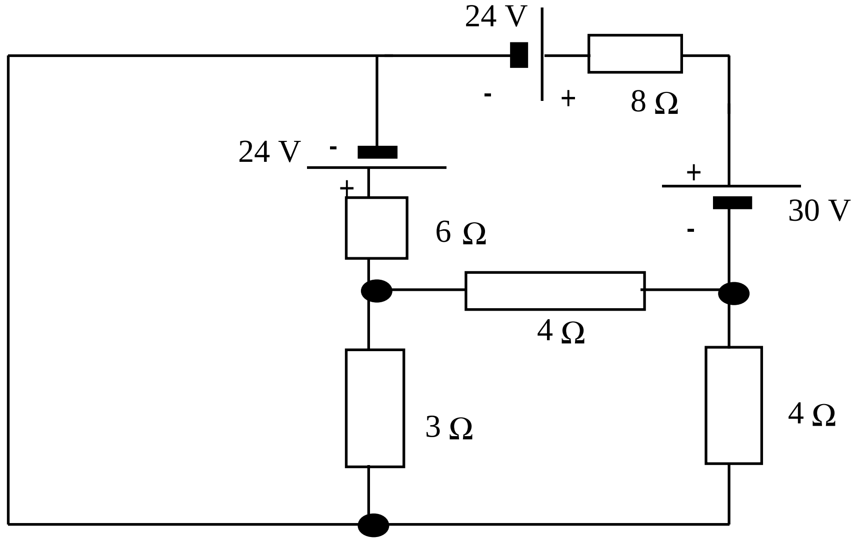


Merk op dat A en B één knoop geworden zijn (we moeten zelf onthouden dat $V_B = V_A + E$).

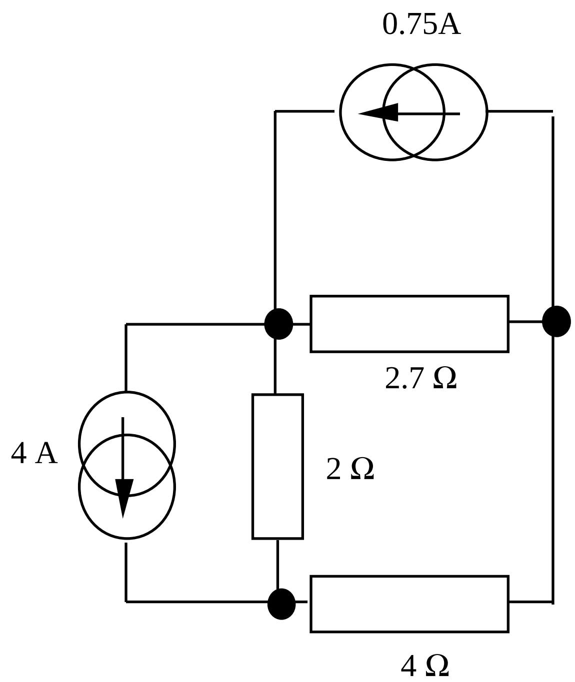
Voorbeeld:



We verplaatsen de bron van 24 V:



Dit is ekwivalent met (het netwerk is lichtjes hertekend):



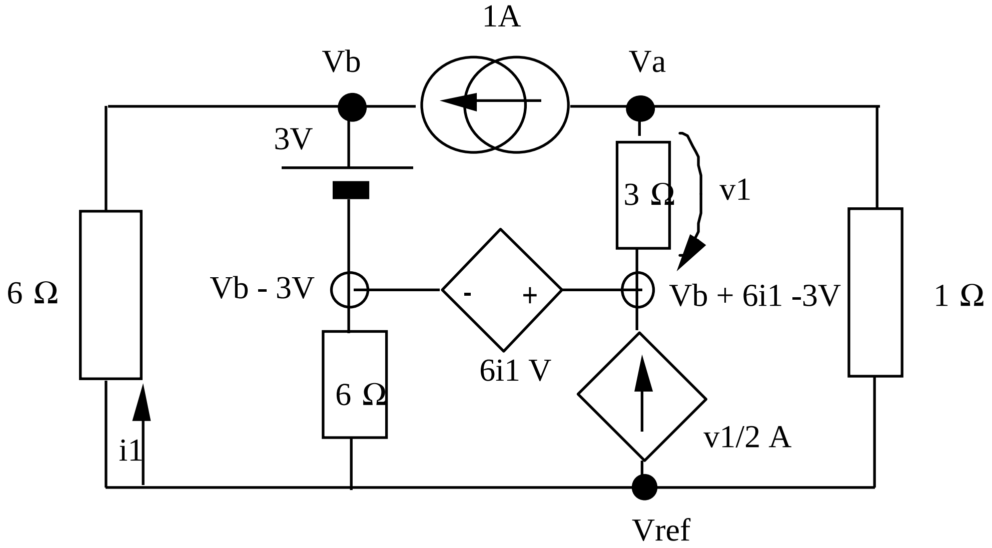
Probeer eens zelf het verband te vinden tussen de knoopspanningen van het oorspronkelijke netwerk, en het ekwivalente.

Er zijn nog andere ekwivalente netwerken mogelijk, bijvoorbeeld als we de 24 V bron naar de andere kant hadden verschoven.

3.2.2. Afhankelijke bronnen

Om een netwerk met afhankelijke bronnen op te lossen met de methode der knoopspanningen, gaan we de waarde van de afhankelijke bronnen uitdrukken in funktie van de knoopspanningen. De afhankelijke spanningsbronnen bv. verdienen dezelfde behandeling als normale spanningsbronnen. Voor stroomgestuurde bronnen moeten we de stroom schrijven als funktie van de knoopspanningen.

Vb.



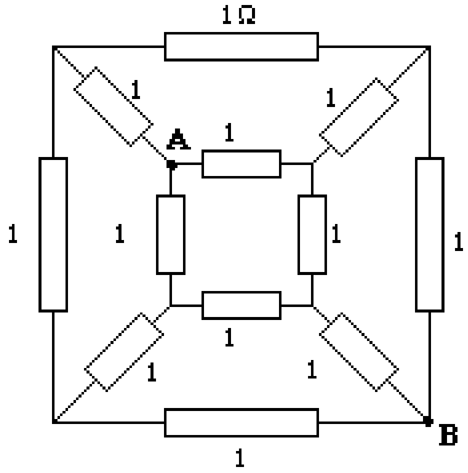
We schrijven de vergelijkingen uit voor knoop a en b, ermee rekening houdend dat $i_1 = \frac{-V_b}{6}$ en $v_1 = V_b + 6i_1 - 3 - V_a = -3 - V_a$.

$$\begin{cases} 1 + \frac{3 + V_a}{3} + V_a = 0 \\ \frac{V_b}{6} - 1 + \frac{V_b - 3}{6} + \frac{-3 - V_a}{3} - \frac{-3 - V_a}{2} = 0 \end{cases}$$

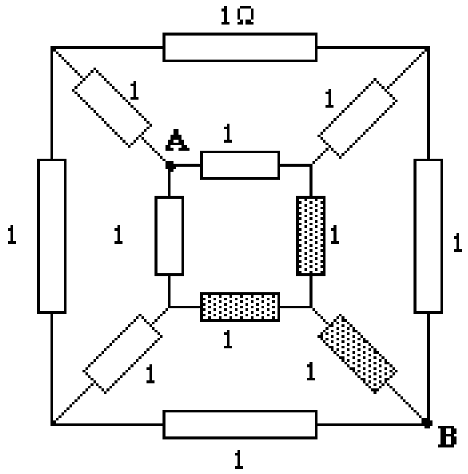
4. Vergelijking tussen methodes

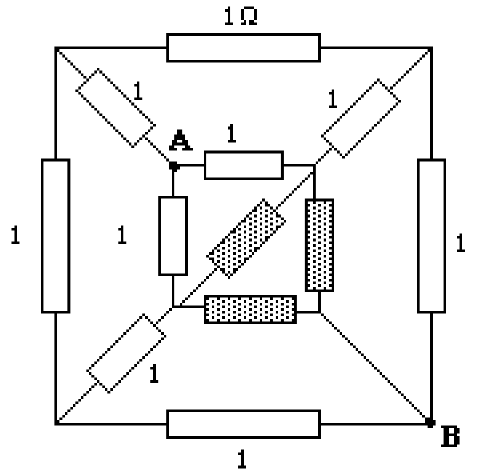
We gaan de methodes vergelijken gebaseerd op het vereenvoudigen van het netwerk met het toepassen van de knoopspanningsmethode.

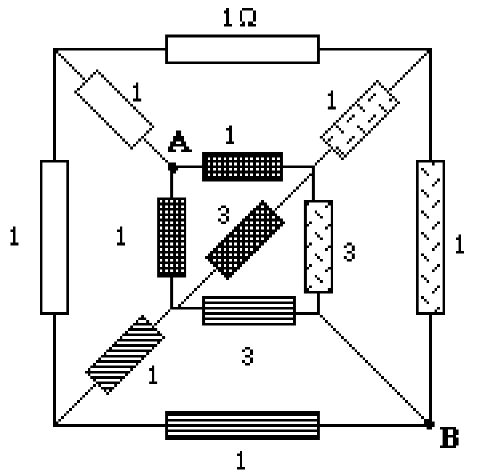
Beschouw het volgende netwerk, een kubus gevormd door weerstanden van 1½. Gevraagd is welke weerstand men meet tussen twee tegenoverliggende hoekpunten van de kubus (A en B).

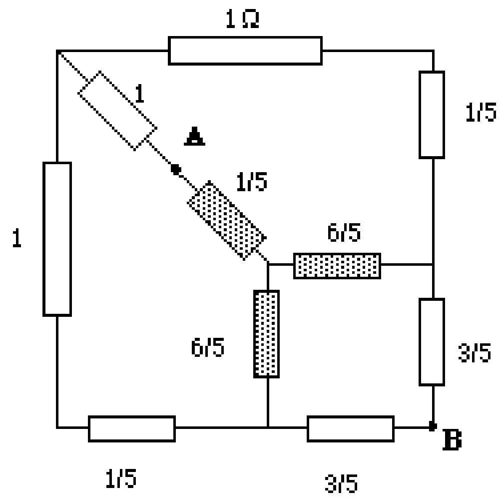


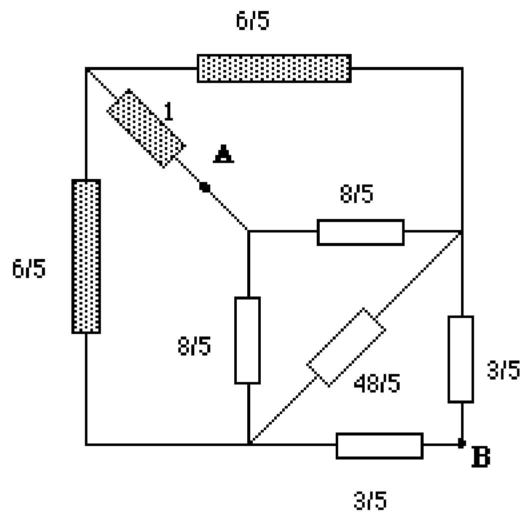
Eerst lossen we dit op door vereenvoudiging van het netwerk via ster-driehoek transformatie. Transformatie van het gearceerde deel geeft telkens de volgende stap.

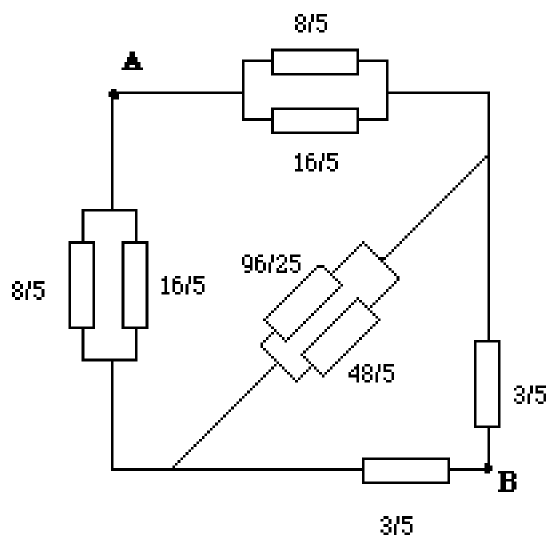


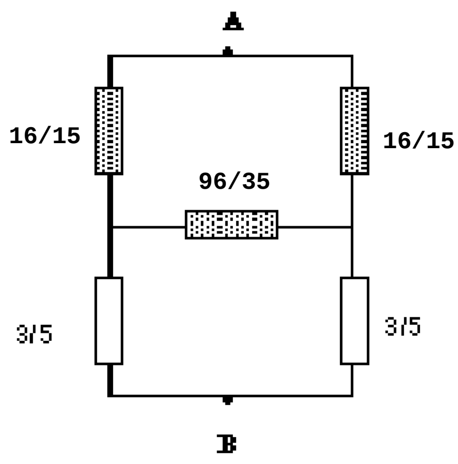

1Ω
1
1
A
1
1
1
1
1
B
1

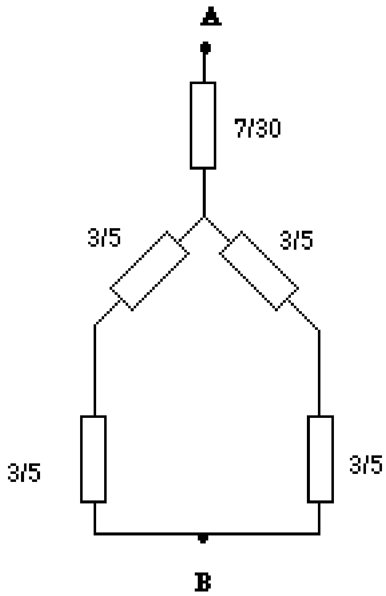

1Ω
1
1
A
1
1
1
3
3
1
3
1
B
1


1Ω
1
1/5
A
1/5
1
6/5
6/5
3/5
B
1/5
3/5


6/5
1
A
8/5
6/5
8/5
48/5
3/5
B
3/5


8/5
A
16/5
8/5
16/5
96/25
48/5
3/5
B
3/5

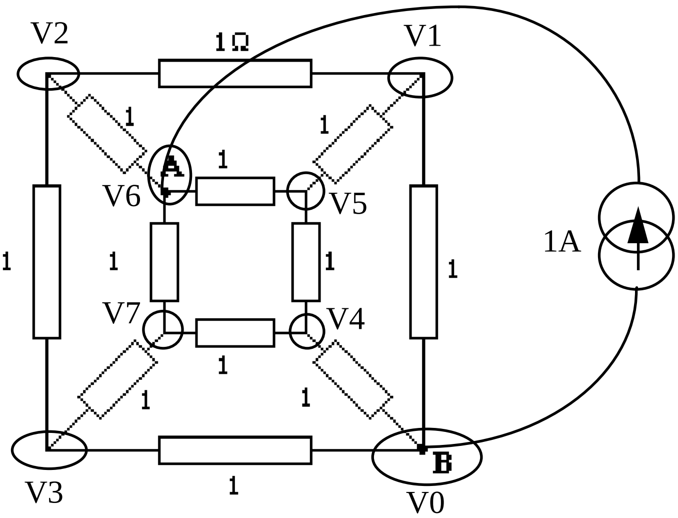

A
16/15
16/15
96/35
3/5
3/5
B



De weerstand tussen A en B volgt hieruit op eenvoudige wijze:

$$R = \frac{5}{6}\ \Omega$$

Als tweede methode hangen we een stroombron tussen A en B. De weerstand R_{AB} wordt dan gevonden door deling van V_{AB} en I_{AB}. I_{AB} is opgelegd door de stroombron, die we hier voor het gemak als 1A kiezen.



We kunnen voor de knoopspanningsmethode rechtstreeks de matrices opstellen aangezien er alleen weerstanden en stroombronnen in het netwerk voorkomen. Dit geeft een 7*7 stelsel:

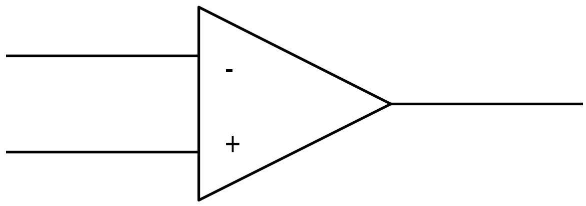
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De gezochte weerstand is $\frac{V_6}{1A} = \frac{5}{6}\Omega$.

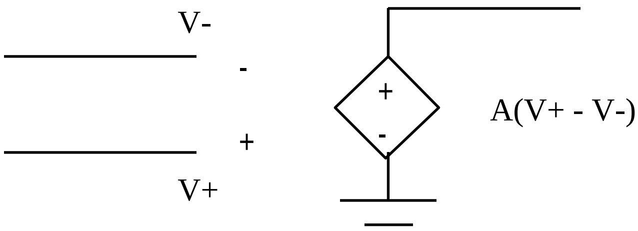
Men ziet dat bij onze tweede methode de matrices zeer eenvoudig opgesteld kunnen worden en de grootste moeite ligt in het oplossen van het stelsel.

5. Toepassing op schakelingen met opamps

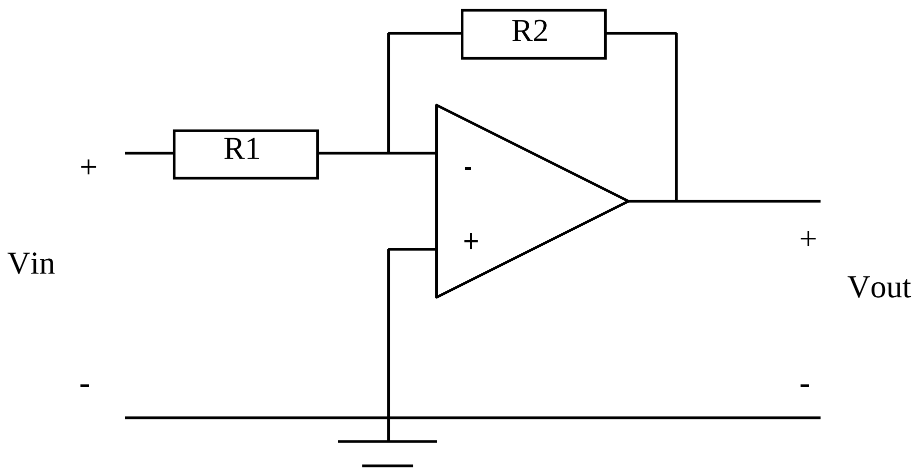
Symbool van een opamp:



Een opamp (OPerational AMPlifier) is een veelgebruikte, praktische implementatie van een spanningsgestuurde spanningsbron. Het volgende ekwivalente schema kan opgesteld worden voor de ideale opamp:

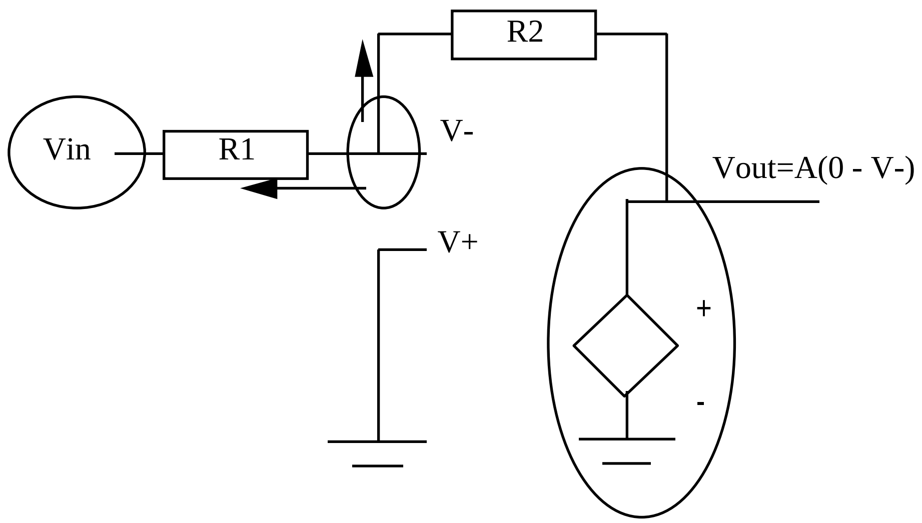


Waarbij de spanningsversterking A _ groot is. Netwerken met opamps worden meestal opgelost met de methode der knoopspanningen. Als voorbeeld een inverterende versterkerschakeling:



Vele schakelingen met opamps zijn ontworpen om in cascade gebruikt te worden (de uitgang van de ene is de ingang van de volgende schakeling). Bij de analyse willen we dan V_{out} bepalen in funktie van V_{in}. Men mag dit oplossen alsof er aan de ingang een spanningsbron V_{in} hangt. Deze bron wordt echter meestal niet getekend.

We kunnen de opamp vervangen door zijn ekwivalent schema. We hebben V_- als enige onafhankelijke knoop.



De vergelijkingen zijn dan:

$$\frac{V_- - V_{in}}{R_1} + \frac{V_- - V_{out}}{R_2} = 0$$

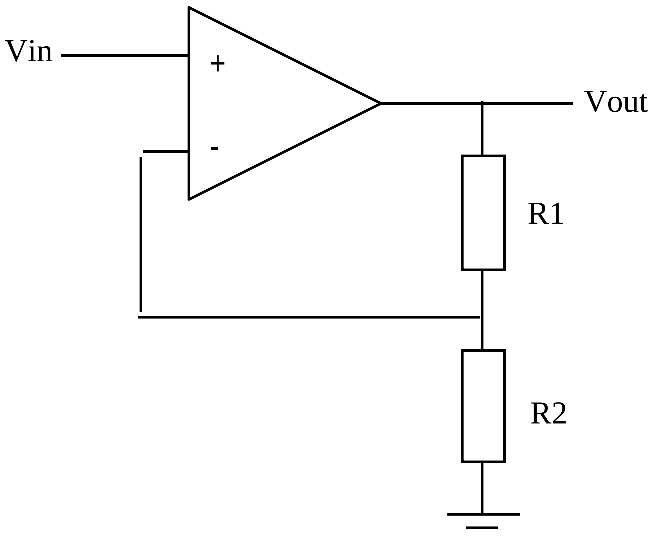
$$V_{out} = \lim_{A\to\infty} (-AV_-)$$

Of, uitgewerkt:

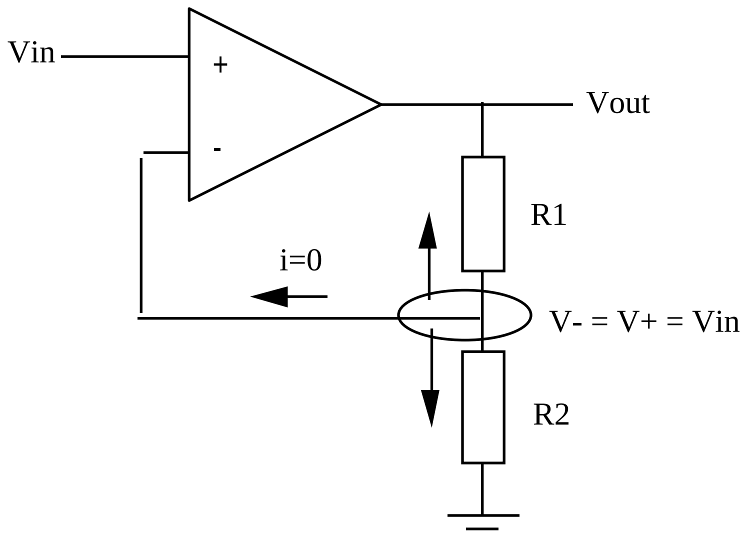
$$V_{out} = \lim_{A\to\infty} \left(\frac{-AR_2 V_{in}}{R_1 + R_2 + AR_1} \right) = -\frac{R_2}{R_1} V_{in}$$

Meestal zal men liever niet de limiet berekenen. Om dit te vermijden vervangt men de vergelijking $V_{out} = \lim_{A\to\infty} A(V_+ - V_-)$ door de vergelijking $V_+ = V_-$. Dit mag altijd voor netwerken waar er een verbinding is van de uitgang van de opamp naar de min-klem (negatieve terugkoppeling).

Voorbeeld: niet inverterende versterker



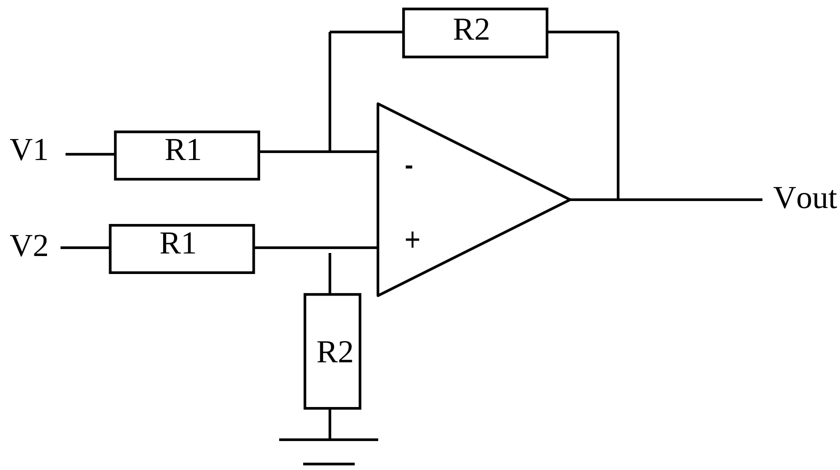
Knoopspanningsmethode toepassen:



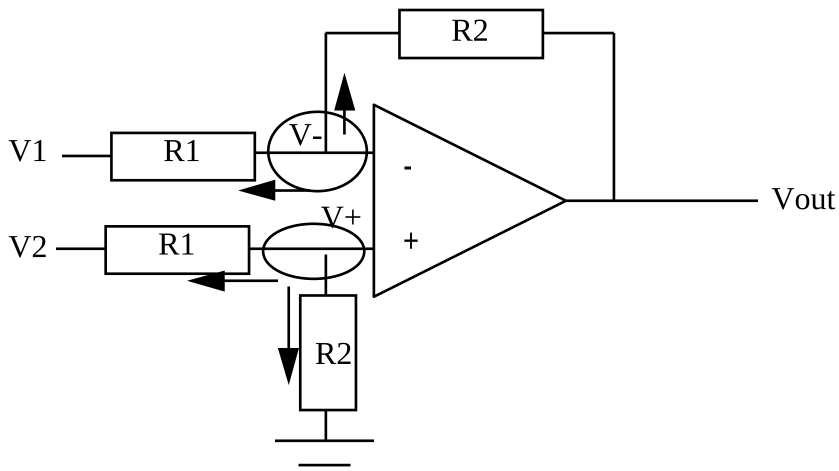
De vergelijking is dan: $\frac{V_{in} - V_{out}}{R_1} + \frac{V_{in}}{R_2} = 0$.

Merk op dat de uitgang van de opamp nooit een onafhankelijke knoop is (zie ekwivalent schema), en dat daar dus de knoopvergelijkingen niet uitgeschreven kunnen worden (men weet immers niet welke stroom uit de opamp komt).

De differentiaalversterker:



De knoopspanningsmethode toegepast in de knopen V- en V+



geeft als vergelijkingen:

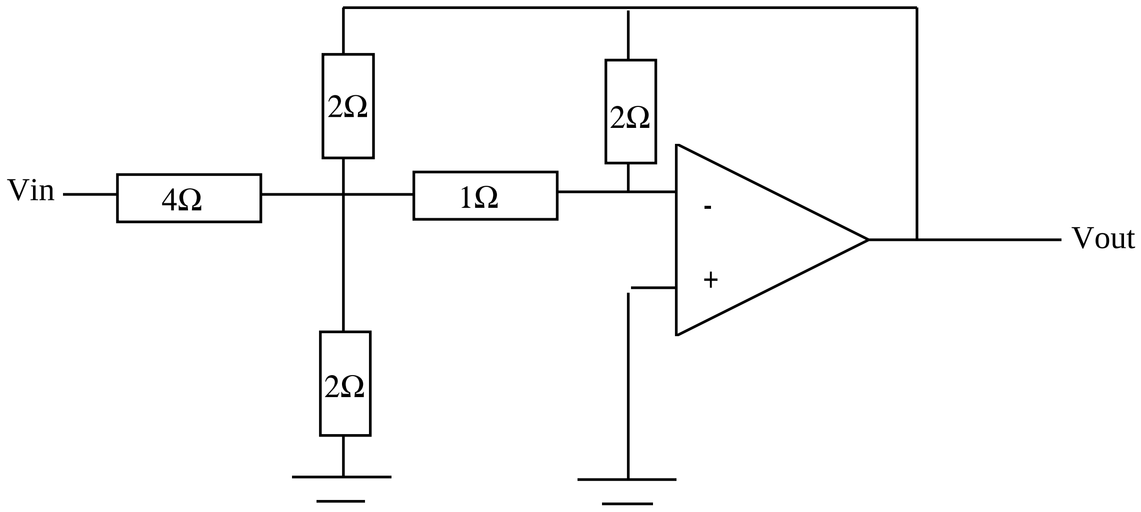
$$V_- = V_+$$

$$\frac{V_- - V_1}{R_1} + \frac{V_- - V_{out}}{R_2} = 0$$

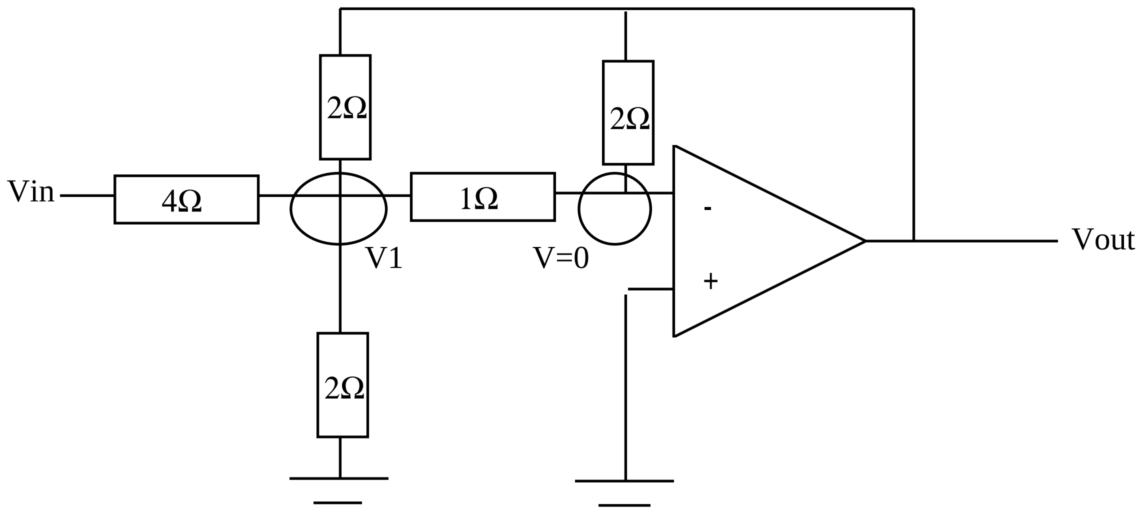
$$\frac{V_+ - V_2}{R_1} + \frac{V_+}{R_2} = 0$$

waaruit volgt dat $V_{out} = \frac{R_2}{R_1}\left(V_+ - V_-\right)$

Nog een paar voorbeelden:



Er zijn twee onafhankelijke knopen:

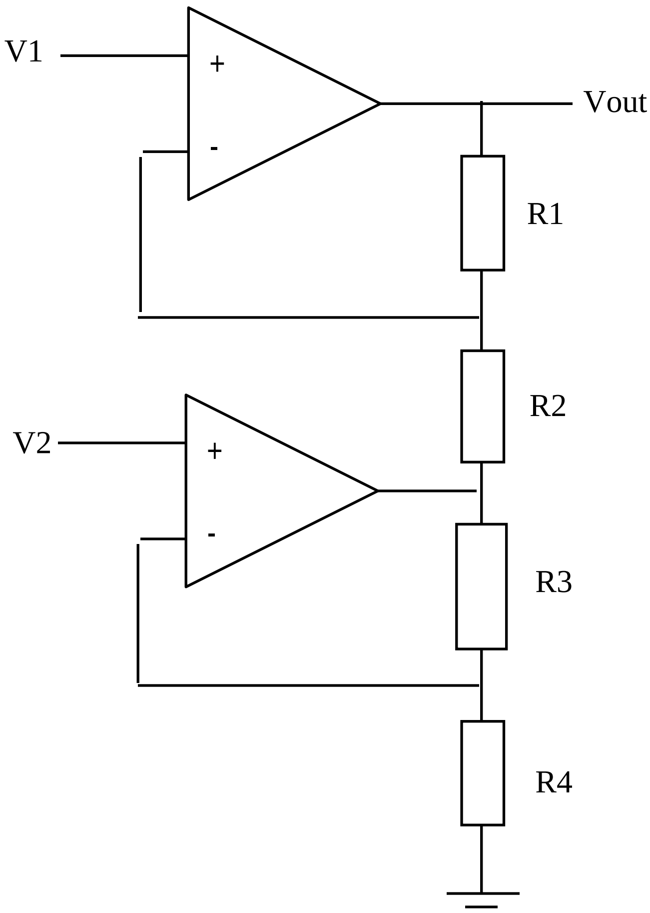


De vergelijkingen zijn:

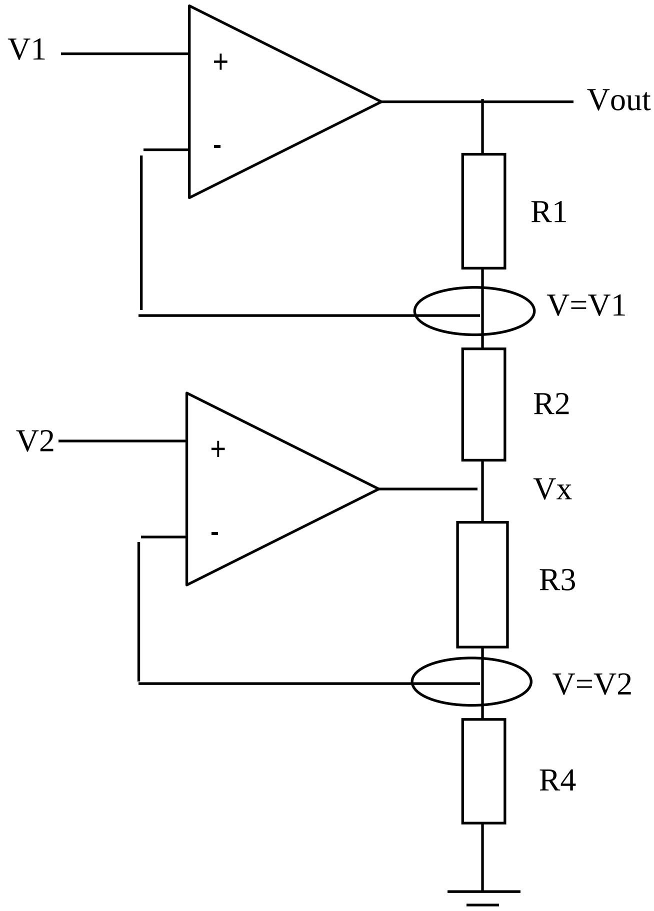
$$\frac{V_1 - V_{in}}{4} + \frac{V_1 - V_{out}}{2} + \frac{V_1}{2} + \frac{V_1}{1} = 0$$

$$\frac{-V_{out}}{2} + \frac{-V_1}{1} = 0$$

Ander voorbeeld:



Er zijn opnieuw twee onafhankelijke knopen. Elimineren van de onbekende V_x geeft V_{out} in funktie van V_1 en V_2.



De vergelijkingen zijn:

$$\frac{V_1 - V_{out}}{R_1} + \frac{V_1 - V_x}{R_2} = 0$$

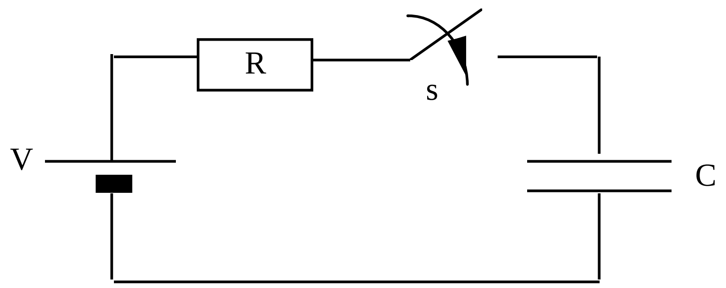
$$\frac{V_2}{R_4} + \frac{V_2 - V_x}{R_3} = 0$$

6. Overgangsverschijnselen

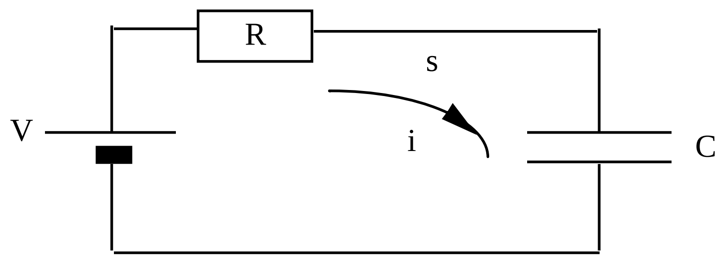
6.1. Inleiding

Tot nu toe hebben we tijdsinvariante netwerken beschouwd. Dit soort netwerken bestaat uitsluitend uit DC bronnen en weerstanden. Een spoel konden we immers vervangen door een kortsluiting en een condensator door een open klem.

Beschouwen we het volgende netwerk:

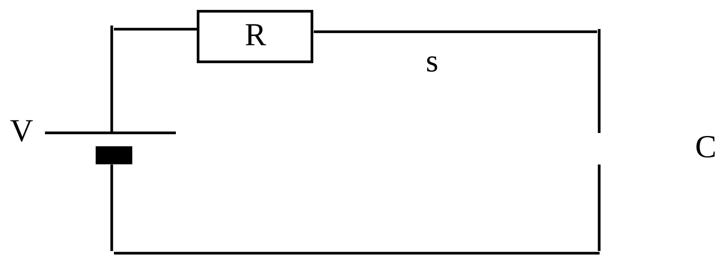


bestaande uit een bron V, een weerstand R, een condensator C en een schakelaar s. De condensator is ongeladen (en het netwerk is in rust. Als we nu de schakelaar sluiten op tijdstip $t=t_0$ zal er een potentiaalverschil over R onstaan en er zal een stroom vloeien door de kring.



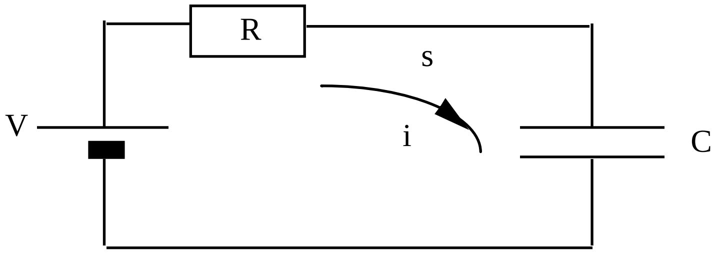
Voor de condensator geldt de betrekking tussen de spanning en de stroom

$i(t) = C \dfrac{d\,v(t)}{d\,t}$ of in integraalvorm $v(t) = V(t_0) + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{t_0}^{t} i\,dt$. De spanning over de condensator zal dus wijzigen als gevolg van de stroom die ontstaan is. De condensator laadt zich op. Na een oneindig lange tijd zal het netwerk een stabiele eindtoestand bereikt hebben . We weten dat in deze toestand de condensator ekwivalent is met een open klem. Er vloeit geen stroom meer dus de spanning over de condensator is V.



Bij de studie van de overgangsverschijnselen willen we het verloop van de spanningen en de stromen bepalen in het tijdsinterval tussen het sluiten van s en het bereiken van de eindtoestand. De oplossing zal bepaald worden door een stelsel van lineaire differentiaalvergelijkingen met konstante koëfficiënten. Systemen van orde hoger dan twee zullen we liever niet analytisch oplossen.

Hoe kunnen we deze vergelijkingen opstellen met de analysemethodes die we tot nu toe gezien hebben? De wetten van Kirchhoff blijven gelden, dus voor ons voorbeeld kunnen we de som van de spanningen over de kring gelijkstellen aan nul.



$$0 = -V + R \cdot i + \frac{1}{C}\int_0^t i \cdot dt + v(0)$$

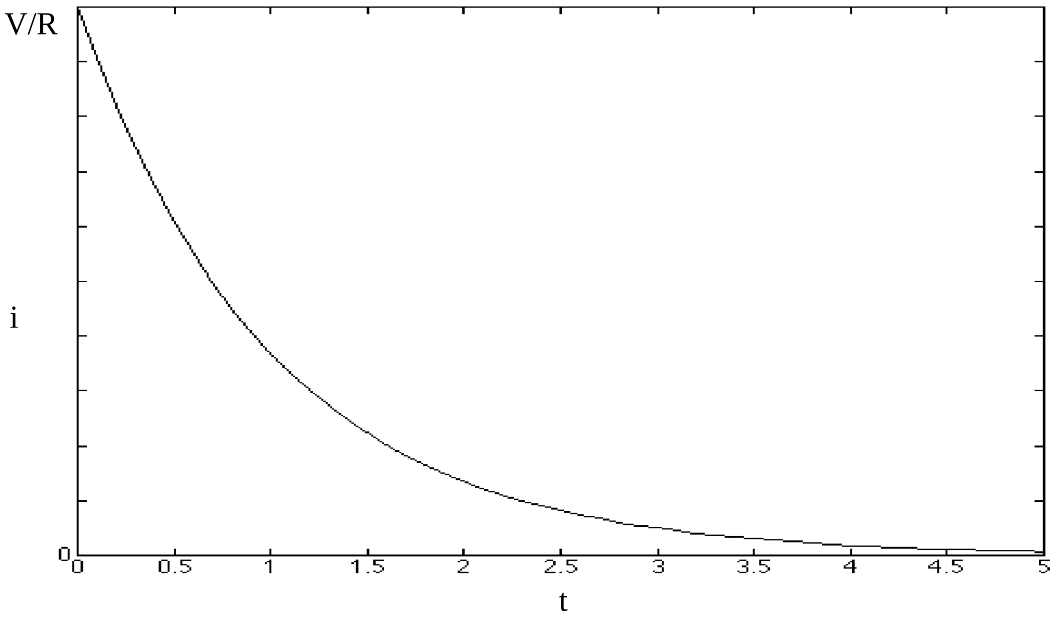
Afleiden naar t geeft:

$$0 = R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i$$

De oplossing van deze vergelijking is van de vorm:

$$i = A \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Uit de beginvoorwaarde volgt dat $A = \frac{V}{R}$.

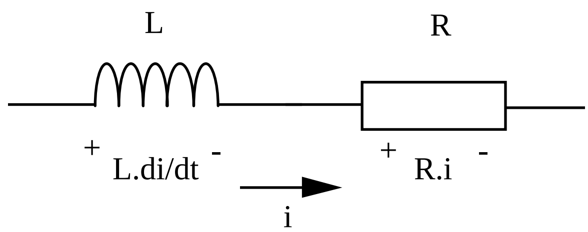


De beginvoorwaarde kunnen we afleiden uit het feit dat de spanning over een condensator kontinu verloopt (anders zou de afgeleide naar de tijd en dus ook de stroom _ worden). Een andere uitleg is dat de lading op de condensator niet plots kan veranderen. Dus vlak na het sluiten van de schakelaar gedraagt een condensator zich als een spanningsbron met als waarde de beginspanning over de condensator.

Analoog kan de stroom door een spoel niet plots veranderen, de spoel gedraagt zich vlak na het sluiten van de schakelaar dus even als een stroombron met als waarde de stroom van voor het sluiten van de schakelaar.

Blijkbaar kunnen we met Kirchhoff aan een oplossing komen. Eens kijken hoe het gesteld is met de andere technieken.

Vereenvoudiging van het netwerk via serie-parallel-ster-driehoek transformatie en de spanningsdeler of de stroomdeler zullen we niet kunnen toepassen. Beschouw bv. een serieschakeling van een weerstand en een spoel:

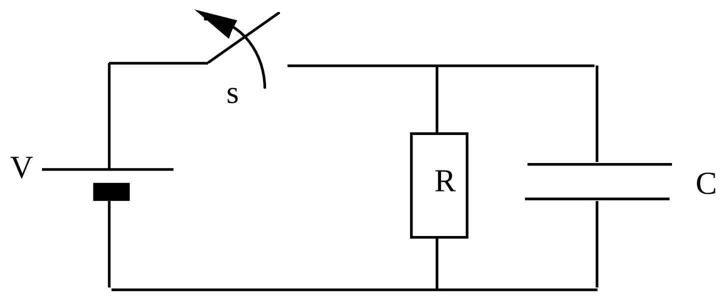


De spanning over de tak is $Ri + L\dfrac{di}{dt}$. Het is duidelijk dat we i **niet** kunnen afzonderen, en de serieschakeling kan dus niet vereenvoudigd worden. Idem voor parallelschakeling.

Superpositie en proportionaliteit bljven in principe geldig bij lineaire netwerken, maar zonder spanningsdeler-stroomdeler methode hebben die geen praktische toepassing. Thevenin en Norton zijn in principe toepasbaar, maar de equivalente weerstand R_{eq} kan niet bepaald worden, omdat we een netwerk met spoelen of condensatoren niet kunnen vereenvoudigen. Voor R_{eq} moeten we dus heel het netwerk copiëren zoals het zich voordoet na kortsluiting van de spanningsbronnen en openleggen van de stroombronnen.

6.1.1 Opmerking:

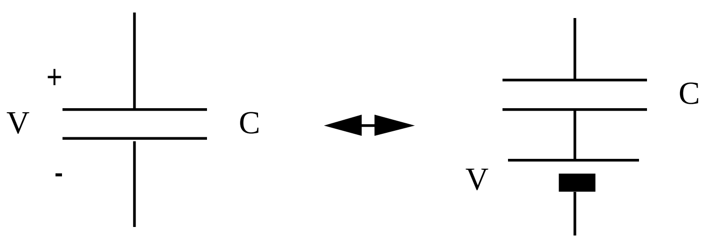
Ook het openen van een schakelaar zorgt voor een verandering in het netwerk en kan aanleiding geven tot een overgangsverschijnsel.



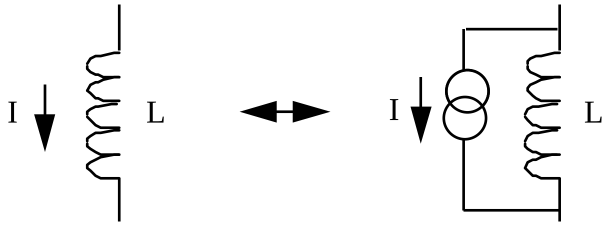
In dit voorbeeld was de schakelaar oorspronkelijk gesloten. Over de opgeladen condensator staat dan een spanning V en door de weerstand loopt een stroom $i = \frac{V}{R}$.
Na het openen van de schakelaar zal de condensator zich langzaam ontladen via de weerstand. De stroom zal exponentieel variëren van $i = \frac{V}{R}$ tot i=0. De differentiaalvergelijking voor i is dezelfde als in het vorige voorbeeld.

6.1.2 .Alternatieve voorstelling van beginspanning over een condensator, of beginstroom door een spoel

Bij de berekening van overgangsverschijnselen kan een geladen condensator in een netwerk vervangen worden door een ongeladen condensator in serie met een spanningsbron. Let op dat de spanning over de werkelijke condensator op een willekeurig moment gelijk is aan de som van de spanningen over de condensator en de bron.

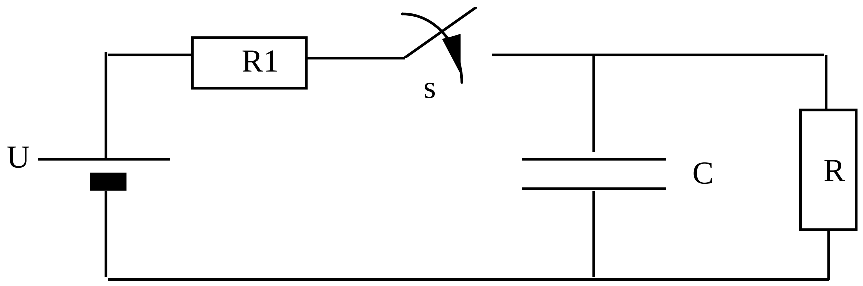


Analoog kan men een stroomvoerende spoel vervangen door een stroomloze spoel in parallel met een stroombron. De werkelijke stroom door de spoel is dan de som van de stromen door de spoel en door de bron.



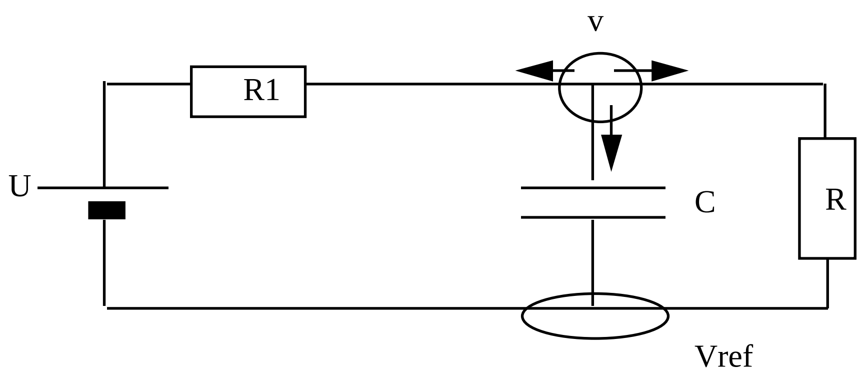
Deze vervanging is niet noodzakelijk voor het oplossen van een netwerk en heeft in feite weinig praktisch nut.

6.2. Methode der knoopspanningen



Gevraagd: de spanning over C na het sluiten van s.

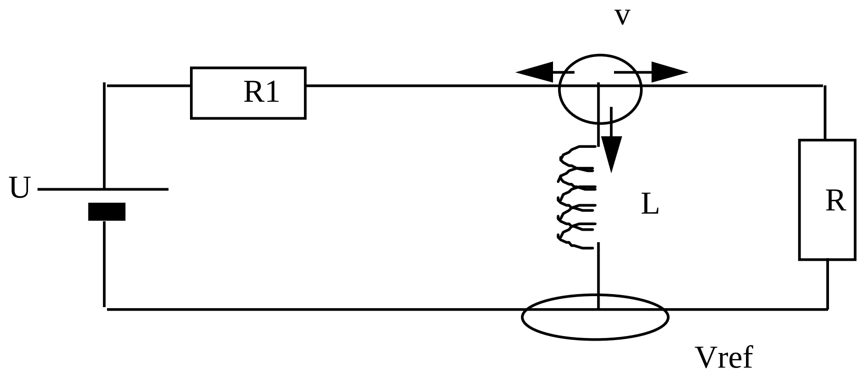
We zoeken de differentiaalvergelijkingen voor onderstaand netwerk met de methode der knoopspanningen.



Som van de stromen uit knoop v:

$$\frac{v}{R} + \frac{v - U}{R_1} + C\frac{dv}{dt} = 0$$

Als er nu een spoel had gestaan:

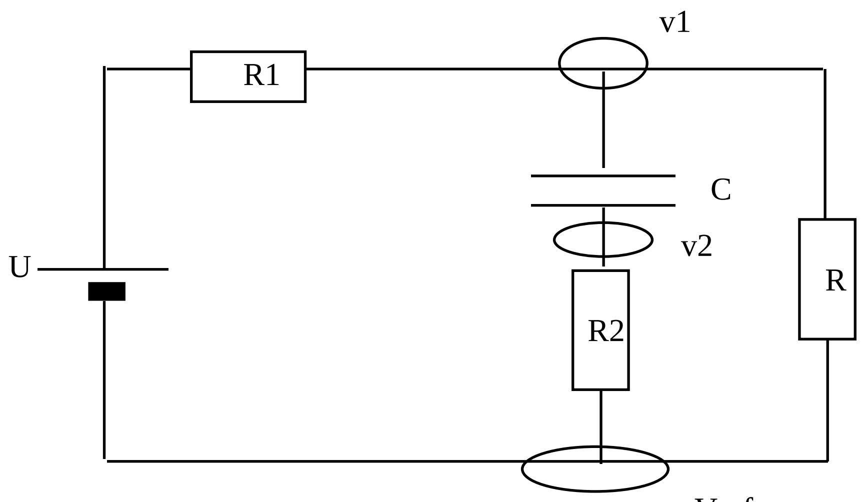


Dan was de vergelijking geweest:

$$\frac{V}{R} + \frac{V - U}{R_1} + \frac{1}{L}\int_0^t V\,dt + i_0 = 0$$

Eén keer afleiden geeft een "gewone" differentiaalvergelijking.

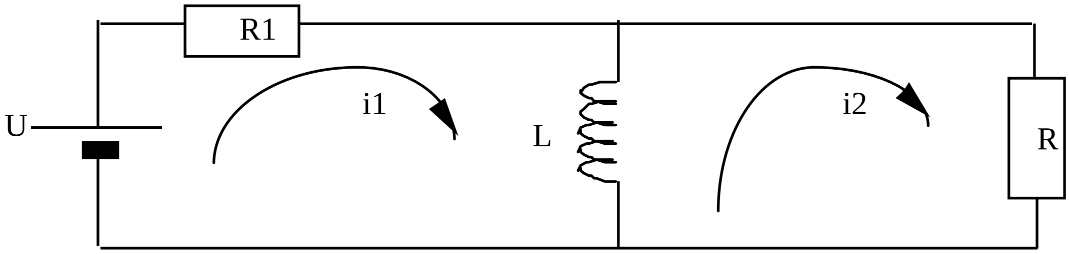
Opmerking:



Om te kunnen schrijven dat $i = C\frac{dv}{dt}$ moeten we de spanning over de condensator kennen in functie van de knoopspanningen. We zijn daarom verplicht een knoop te kiezen aan **elke** kant van de condensator, zelfs als daar geen aftakkingen zijn. We kunnen nu de vergelijkingen uitschrijven:

$$\begin{cases} \dfrac{v_1}{R} + \dfrac{v_1 - U}{R_1} + C\dfrac{d(v_1 - v_2)}{dt} = 0 \\ \dfrac{v_2}{R_2} + C\dfrac{d(v_2 - v_1)}{dt} = 0 \end{cases}$$

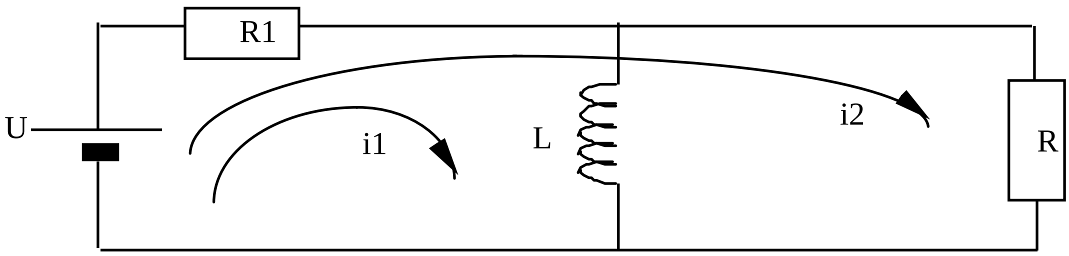
6.3. Methode der maasstromen



Merk op dat we een differentiaalstelsel bekomen.

$$\begin{cases} -U + R_1 \cdot i_1 + L\dfrac{d(i_1 - i_2)}{dt} = 0 \\ R \cdot i_2 + L\dfrac{d(i_2 - i_1)}{dt} = 0 \end{cases}$$

Dit is een tamelijk onaangenaam stelsel. Als we onze maasstromen zodanig kiezen dat er maar één maasstroom door de spoel gaat, hebben we slechts één differentiaalvergelijking.



In dat geval hebben we:

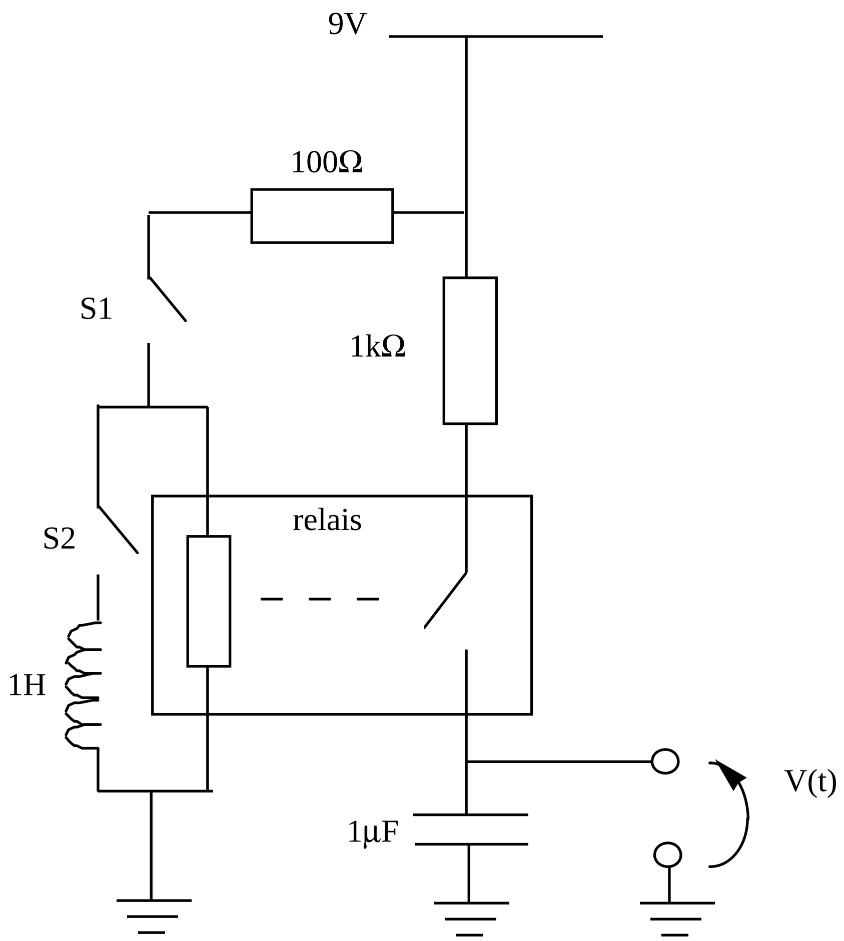
$$\begin{cases} -U + R_1 \cdot (i_1 + i_2) + L\dfrac{d(i_1)}{dt} = 0 \\ R \cdot i_2 - U + R_1 \cdot (i_1 + i_2) = 0 \end{cases}$$

6.4. Een voorbeeld

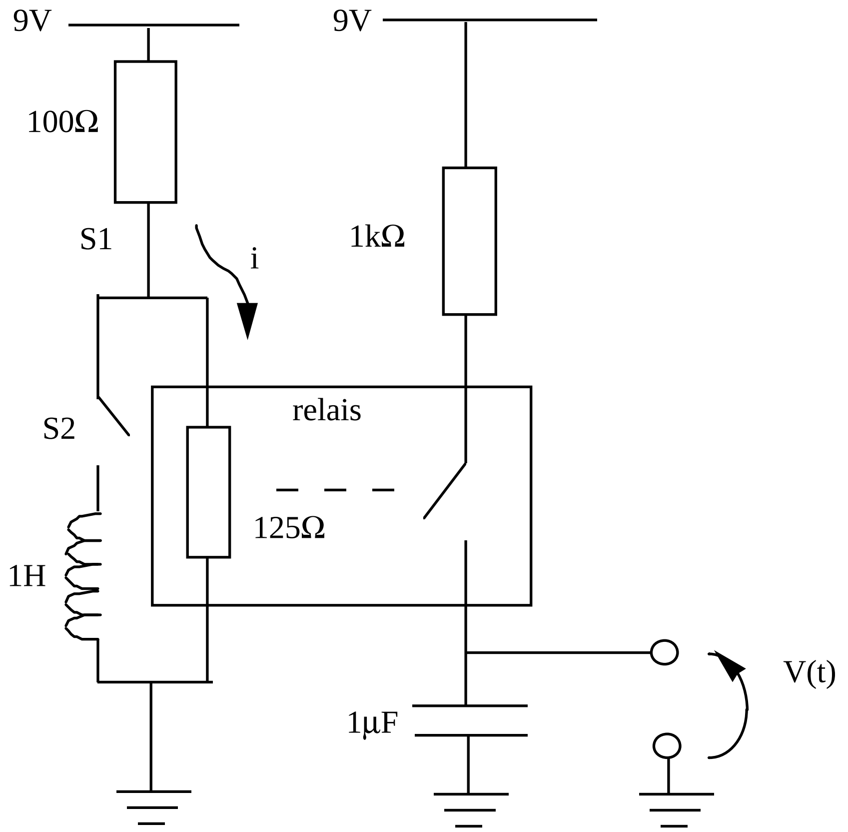
Tot nu toe werd enkel aandacht besteed aan het opstellen van de vergelijkingen. De reden hiervoor is dat zonder de juiste vergelijkingen een oplossing vinden onmogelijk is. Bovendien hoort het oplossen van differentiaalvergelijkingen bij Analyse en dit is niet de plaats om daar veel nadruk op te leggen. In het volgende voorbeeld wordt echter wel verder gerekend tot aan de oplossing.

Onderstaande elektrische schakeling bevat een relais. De relais-bekrachtiging kan als zuiver resistief beschouwd worden met een weerstand van 125 Ω. De relais sluit zich als de bekrachtigingsstroom minstens 28 mA bedraagt. De relais opent zich weer als de stroom terugvalt tot onder 25 mA. Op tijdstip t=0 wordt schakelaar S_1 manueel gesloten. Een elektronische timer zorgt ervoor dat na precies 500 µs schakelaar S_2 gesloten wordt. Gevraagd wordt de regimespanning over de condensator te berekenen indien deze een beginspanning van 3V heeft op t=0s. De voeding is een gestabiliseerde 9V DC bron.

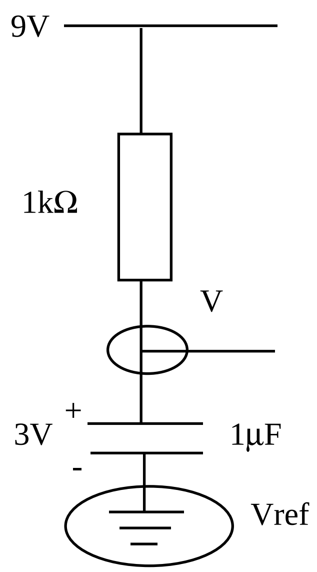
Hint: een relais is een stroomgestuurde schakelaar.



Merk op dat de twee takken los van elkaar staan, het relais vormt het enige verband tussen beide. We hebben dus, op t=0 (S1 sluit):



$i = \dfrac{9}{100+125} = 40\text{mA} > 28\text{mA}$ dus de schakelaar van het relais sluit op t=0.

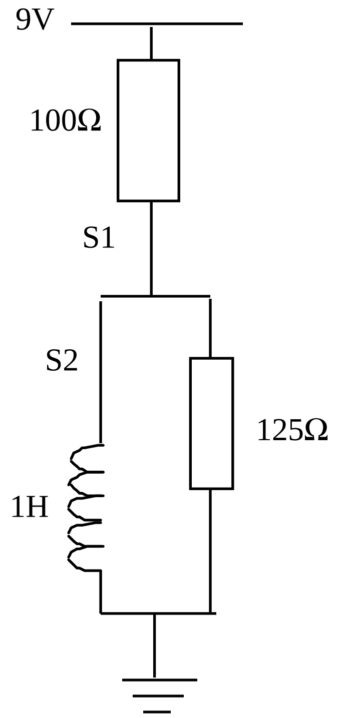


In knooppunt V is de som van de stromen $\dfrac{\text{V}-9}{1\text{k}\Omega} + 1\mu\text{F}.\dfrac{d}{dt}(\text{V}-3) = 0$ of

$\text{V} + 1\mu\text{F}.1\text{k}\Omega\dfrac{\text{dV}}{\text{dt}} = 9$. Hieruit leiden we af dat $\text{V} = A\,\text{e}^{\frac{-\text{t}}{1\text{k}\Omega.1\mu\text{F}}} + B$. De konstanten kunnen we snel bepalen uit V=3 op t=0 en V=9 op t=_. Dit is meestal eenvoudiger dan de oplossing substitueren in de vergelijking. De oplossing is dan

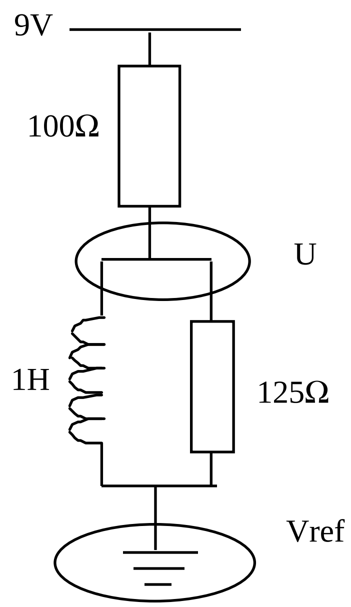
$$V = 9 - 6\ e^{\frac{-t}{1k\Omega . 1\mu F}}\ .$$

Deze toestand blijft echter niet duren: na 500µs sluit S2 en de linker tak wordt:



Op t=_ zal de spoel zich gedragen als een kortsluiting, er zal dus geen stroom meer lopen door het relais. We moeten het tijdstip bepalen waarop de bekrachtigingsstroom <25mA wordt. Op dat moment zal de relaisschakelaar openen, en blijft $V_{condensator}$ konstant.

Knoopspanningsmethode toepassen levert:

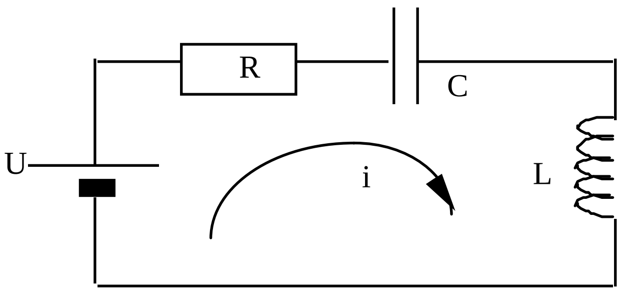


$\frac{U-9}{100}+\frac{U}{125}+\int_0^t Udt=0$ of $\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{125}\right)\frac{dU}{dt}+U=0$. Dus $U=Ae^{-\frac{12500}{225}t}$. We vinden dan $i(t)=\frac{U}{125}=44\,mAe^{-\frac{12500}{225}t}$ want i(0)=44mA.

We waren even vergeten dat dit begon op t=500µs dus de werkelijke oplossing is $i(t)=44mAe^{-\frac{12500}{225}(t-500\mu s)}$. We zoeken nu t' waarbij i gedaald is tot 25 mA. $25mA=44\,mAe^{-\frac{12500}{225}(t'-500\mu s)}$ of t'=10,68ms. Op dit tijdstip was de spanning over de condensator $V=9-6\ e^{\frac{-10{,}68ms}{1k\Omega.1\mu F}}$ of V=8,9999V.

6.5. Waarschuwing omtrent de beruchte Wet van Lenz

Beschouw een R-L-C seriekring:



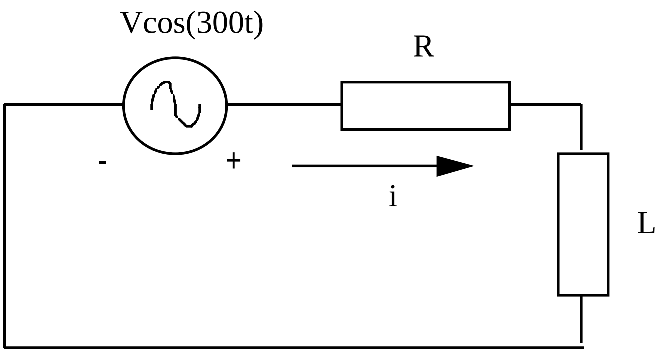
Als we de methode der maasstromen toepassen bekomen we de differentiaalvergelijking $Ri+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t idt+v_0-U=0$. Om mysterieuze ondoorgrondelijke redenen zijn er ieder jaar weer studenten die op het examen deze vergelijking willen gebruiken voor eender welk overgangsverschijnsel. Ze noemen dit dan "de wet van Lenz". (Wie is die Lenz eigenlijk? Ik dacht altijd dat de wet van Lenz te maken had met de richting van de stroom in een geleider als gevolg van een magnetisch veld.) Zoals uit het voorgaande toch moet blijken hebben verschillende netwerken verschillende differentiaalvergelijkingen, en elk netwerk behandelen alsof het een R-L-C seriekring was is natuurlijk volkomen FOUT! Tot op heden is nog altijd onduidelijk waar deze eigenaardige verwarring vandaan komt. Het is gewoon verbijsterend om te zien wat soms gedaan wordt om te kunnen voldoen aan de Heilige Wet van Lenz. Stukken netwerk worden gewoon weggelaten, elementen in verschillende takken moeten op bizarre wijze bijeengeteld worden (in de vergelijking staat maar één R, één L en één C), enzovoort.

Laat het voor eens en altijd duidelijk zijn; de zogenaamde "wet van Lenz", $Ri+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t idt+v_0=U$ en haar variant $\frac{u}{R}+C\frac{du}{dt}+\frac{1}{L}\int_0^t udt+i_0=I$ zijn GEEN ALGEMEEN GELDIGE VERGELIJKINGEN!!!!

7. Complexe netwerken

Tijdsvariante netwerken bevatten niet noodzakelijk een schakelaar. Een bron kan ook een in de tijd variërende waarde hebben. Bij studie van wisselspanningsnetwerken zijn we meestal alleen geïnteresseerd in de regime-oplossing. De regime-oplossing stemt overeen met de particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking van het netwerk.

Voorbeeld:



De lusstroomvergelijking is $R \cdot i + L\dfrac{di}{dt} = V\cos(300t)$.

We weten dat de partikuliere oplossing kan geschreven worden onder de vorm $A\cos(300t) + B\sin(300t)$ of $\sqrt{A^2 + B^2}\cos\left(300t + \operatorname{atan}\left(\dfrac{B}{A}\right)\right)$ of $D\cos(300t + \varphi)$.

De constanten kunnen we bepalen door substitutie van de oplossing in de vergelijking.

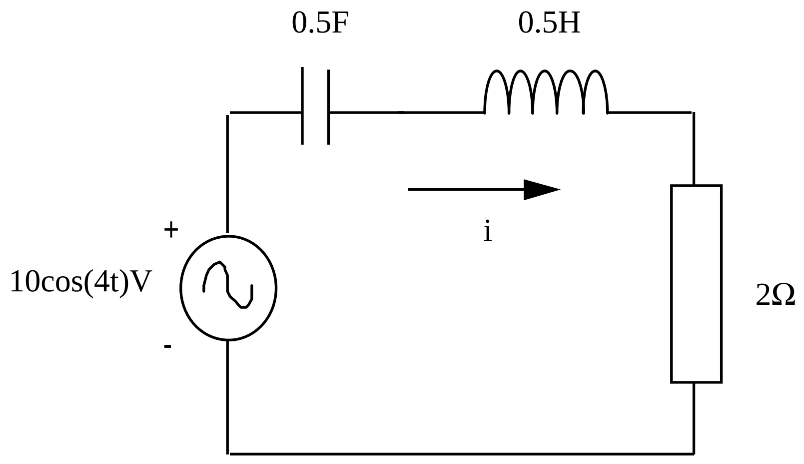
De complexe netwerkanalyse maakt gebruik van een truuk om dit laatste te vergemakkelijken. We weten uit de complexe analyse dat $De^{j(300t+\varphi)} = D\cos(300t + \varphi) + jD\sin(300t + \varphi)$. Hieruit volgt dat $D\cos(300t + \varphi) = \mathrm{Re}(De^{j(300t+\varphi)})$. De truuk bestaat er nu in $De^{j\varphi}e^{j300t}$ te substitueren in de differentiaalvergelijking in plaats van $D\cos(300t + \varphi)$. Tegelijk schrijven we voor de bronterm Ve^{j300t} in plaats van $V\cos(300t)$. Dit zal ons dezelfde waarden opleveren voor D en φ. Maar daarenboven kunnen we e^{j300t} uit de vergelijking elimineren. Het voordeel hiervan zal spoedig blijken.

$R \cdot i + L\dfrac{di}{dt} = V\cos(300t)$ wordt nu $R \cdot Ie^{j\varphi}e^{j300t} + L\dfrac{dIe^{j\varphi}e^{j300t}}{dt} = Ve^{j300t}$, of $R \cdot Ie^{j\varphi} + j300L \cdot Ie^{j\varphi} = V$, of gewoon $R \cdot i + j300L \cdot i = V$ waarbij i een complexe stroom is.

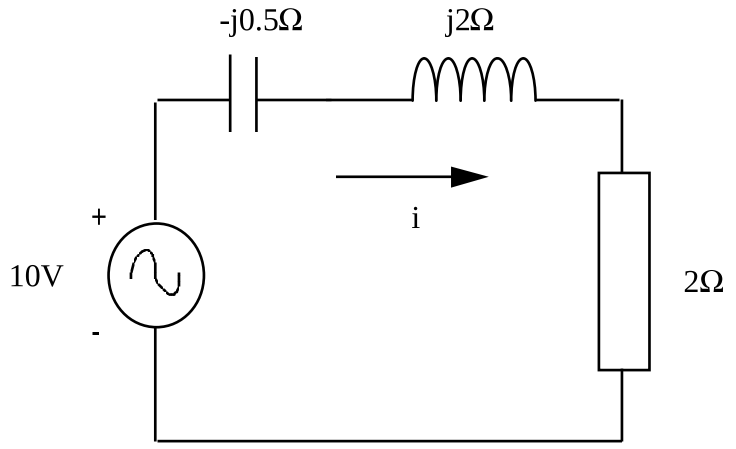
We kunnen nu het begrip impedantie (complexe weerstand) invoeren. In een netwerk waarin alle bronnen dezelfde pulsatie w hebben, is de impedantie van een weerstand R, de impedantie van een spoel $j\omega L$ en de impedantie van een condensator $(j\omega C)^{-1}$.

Zo een netwerk met complexe impedanties kunnen we op dezelfde wijze aanvallen als een gewoon netwerk met weerstanden. Als enige verschil zijn nu alle grootheden complexe getallen.

Vb.



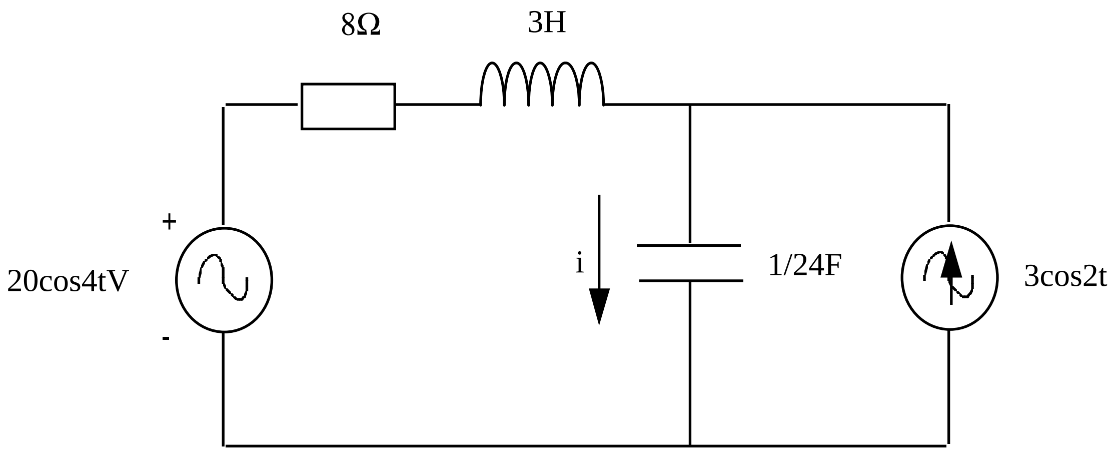
Het overeenstemmende complexe netwerk is



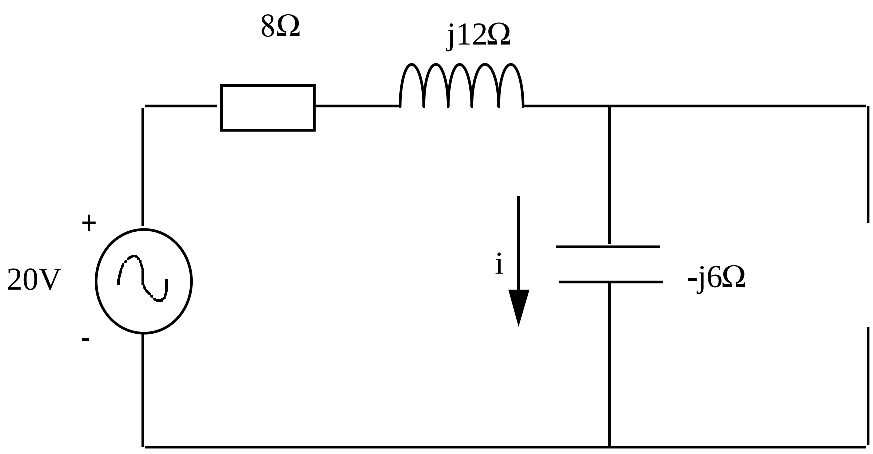
De stroom volgt dan uit $i = \frac{V}{Z} = \frac{10V}{(2 - j0.5 + j2)\Omega} = (3.2 - j2.4)A = 4e^{-j.64}A$. De reële stroom is dan $\mathrm{Re}\left(4e^{-j.64}e^{j4t}\right)A = 4\cos(4t - 0.64)A$.

Indien er in het netwerk meerdere bronnen voorkomen, met een verschillende pulsatie, moet men superpositie toepassen (in het tijdsdomein!).

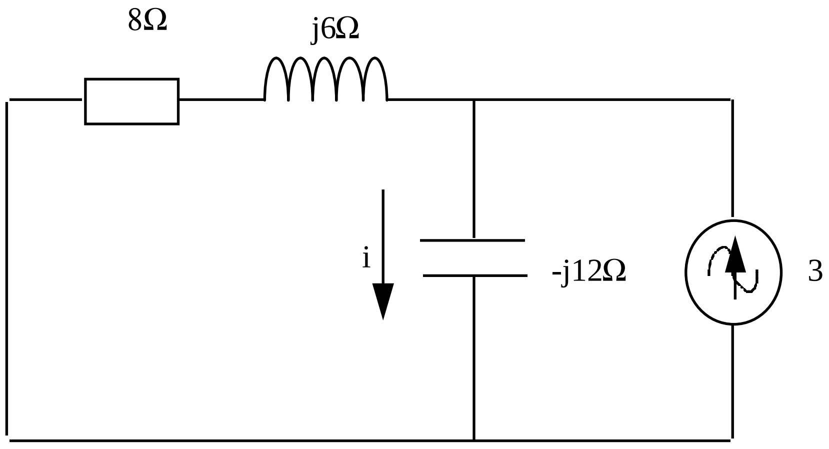
Vb.



Geeft volgende twee complexe netwerken:



In dit geval is $i = 2e^{-j0.64}A$.

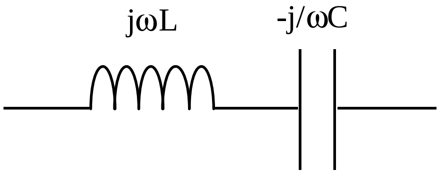


Hier is $i = 3e^{j1.29}A$.

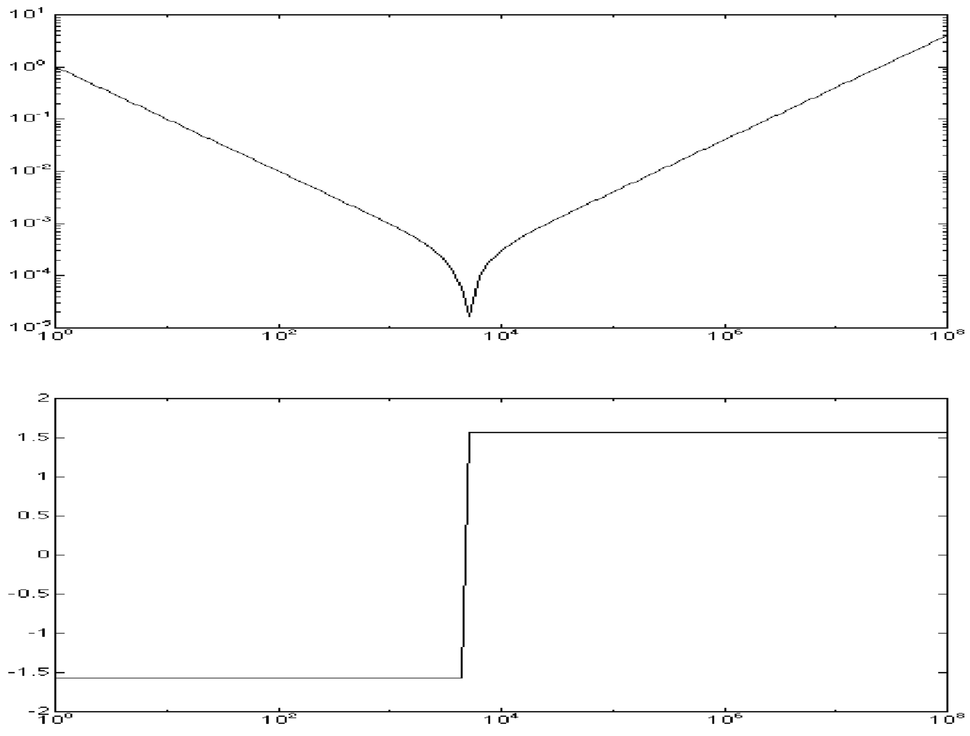
De totale stroom is gegeven door $i = \mathrm{Re}(2e^{-j.64}e^{j4t} + 3e^{j1.29}e^{j2t})\mathrm{A}$ dus $\mathrm{i} = 2\cos(4\mathrm{t}-.64) + 3\cos(2\mathrm{t} + 1.29)\mathrm{A}$.

Merk op dat impedanties nu negatieve waarden kunnen aannemen. Het is dus ook mogelijk dat de impedantie van een serieschakeling kleiner is dan de impedantie van sommige elementen daarin, of dat de impedantie van een parallelschakeling groter is dan de impedantie van de elementen. Bij resistieve netwerken was dit onmogelijk.

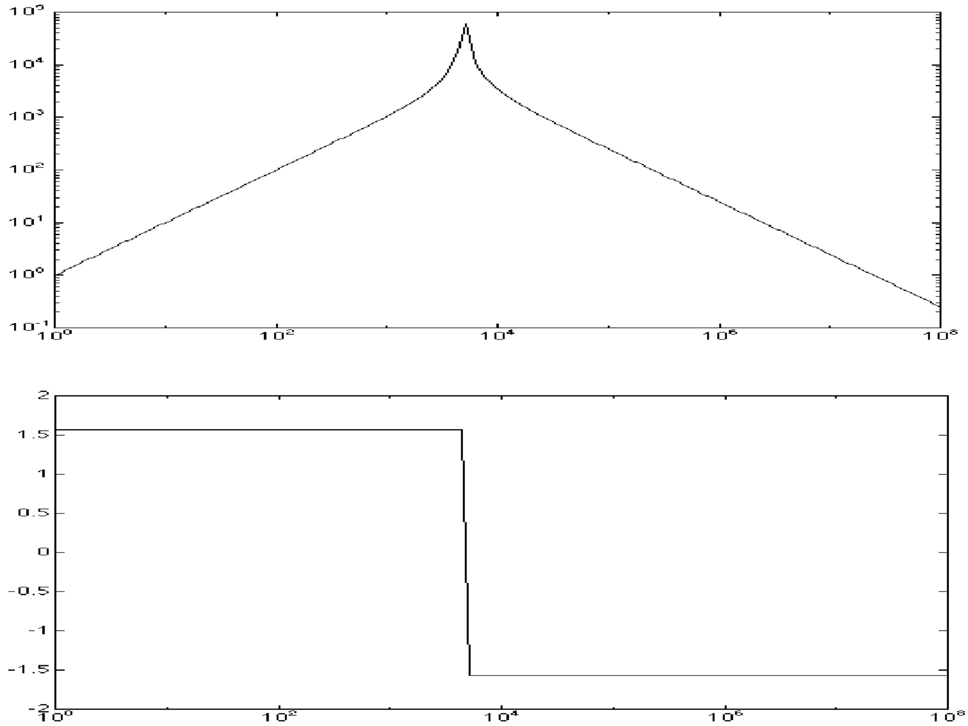
Bv.



heeft als impedantie $\mathrm{Z} = \mathrm{j}\dfrac{\omega^2\mathrm{CL}-1}{\omega\mathrm{C}}$. Deze impedantie is nul voor $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}}$. Dit is de oscillatiefrequentie van de LC-serie kring, of ook de eigenfrequentie van de differentiaalvergelijking die een LC-serie kring beschrijft. Bij deze frequentie gedraagt deze tak zich dus als een kortsluiting. De amplitude en fase van de impedantie van de seriekring in funktie van ω verlopen als volgt (let op de logarithmische schaal):



Bepaal zelf de impedantie van een LC-parallelschakeling, en hoe deze oneindig wordt voor $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. De amplitude en fase van de impedantie in funktie van ω (op logarithmische schaal):



Bij de resonantiefrequentie gedraagt een LC-parallelschakeling zich dus als een open klem.

Let ook op het gedrag van de fase. Een LC-parallelkring gedraagt zich bij lage frequentie (kleiner dan ω_0) als een spoel, en bij hoge frequentie als een condensator. Dit kan men eenvoudig inzien. Aangezien de spoel en de condensator in parallel staan, staat over beiden dezelfde spanning. Bij $\omega < \omega_0$ is $|j\omega L| < \left|\frac{1}{j\omega C}\right|$ en het grootste deel van de stroom zal door de spoel stromen. Bij $\omega > \omega_0$ is het net andersom.

Bij een LC-seriekring is de stroom door beide elementen gelijk. Bij $\omega < \omega_0$ is $\left|\frac{1}{j\omega C}\right| > |j\omega L|$ en het grootste deel van de spanning zal over de condensator staan. De seriekring gedraagt zich dus bij lage frequentie als een condensator en bij hoge frequentie als een spoel.

Stel zelf eens de formules op voor de impedantie van een RC- seriekring en een RC-parallelkring. Merk op dat de fasehoek altijd negatief blijft. Doe het zelfde voor RL-serie en RL-parallelkringen. Ga na dat de fasehoek hier altijd positief is.

Deze begrippen moet u goed oefenen.

8. Grafische oplossingsmethode

De grafische oplossingsmethode is analoog met de methode der proportionaliteit zoals eerder besproken voor resistieve netwerken. Zoals vroeger gaan we veronderstellen dat we de waarde van een bepaalde stroom of spanning kennen, en van daaruit gaan we de bronspanning (of stroom) bepalen die met deze waarde overeenstemt. Omwille van de lineariteit kunnen we dan de juiste waarden halen uit de verhouding van de werkelijke en de gevonden bronspanning (of bronstroom). Ingeval er meerdere bronnen zijn moeten we superpositie toepassen. De superpositie kan grafisch gebeuren op voorwaarde dat alle bronnen dezelfde frequentie hebben.

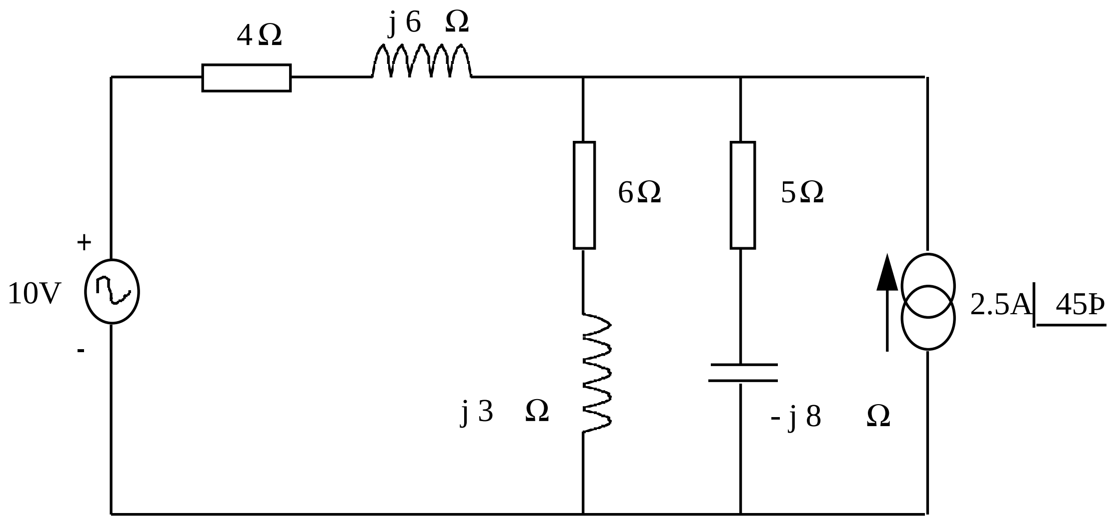
Bij complexe netwerken heeft elke spanning of stroom zowel een amplitude als een fase. We moeten nu dus ook een fase kiezen voor onze referentiestroom. De gevonden bronspanning (of stroom) zal zowel in amplitude als in fase verschillen van de werkelijke waarde. Om de werkelijke waarden te vinden moeten we alle amplitudes vermenigvuldigen met de verhouding van de amplitudes van de werkelijke en de gevonden bronspanning, en alle fasen vermeerderen met het faseverschil tussen de werkelijke en de gevonden bronspanning.

We kunnen alle complexe spanningen en stromen grafisch voorstellen door middel van vektoren. De amplitudecorrectie is dan de schaalfaktor van de tekening, en de fasecorrectie wordt bekomen door de referentie-as over de gewenste hoek te roteren.

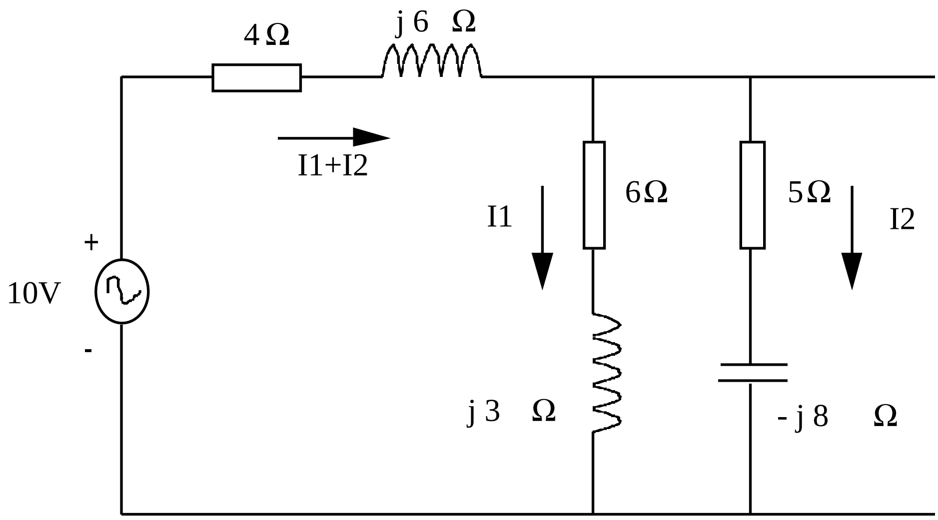
Voor de duidelijkheid van de tekening is het aangeraden verschillende kleuren te gebruiken voor spanningsvektoren en stroomvektoren. De schaal van de spanningsvektoren hoeft niet noodzakelijk dezelfde te zijn als die van de stroomvektoren.

(Opmerking: de tekeningen bij dit hoofdstuk zijn niet op de graad en de millimeter nauwkeurig.)

Vb.



Aangezien er twee bronnen zijn, moeten we superpositie toepassen. We beginnen bv. met de spanningsbron



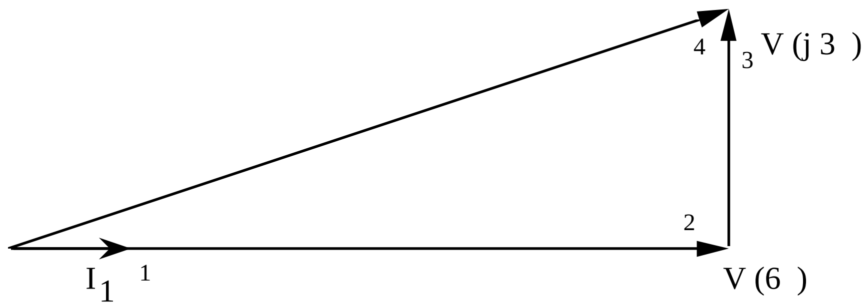
Oplossing:

Laat ons bv. de stroom I_1 als referentie nemen.

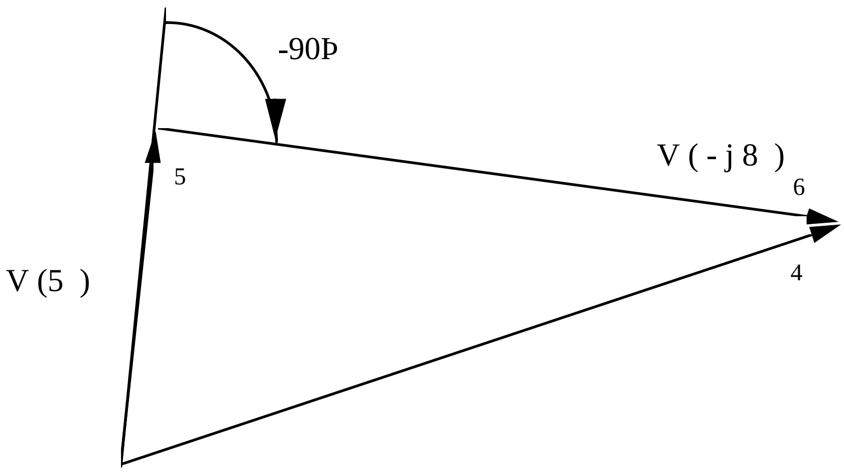
1. De spanning over de weerstand van 6½ wordt: $V(6\Omega) = 6.I_1$

2. De spanning over de spoel met impedantie 3½ wordt gegeven door:
   $V(3\Omega) = 3.I_1 \underline{|90°}$

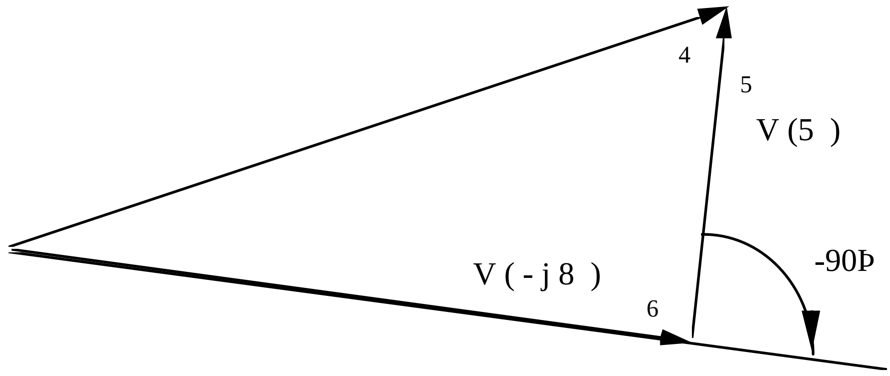
3. De spanning over de paralleltak is gelijk aan de resultante van de vektoren 2 en 3.



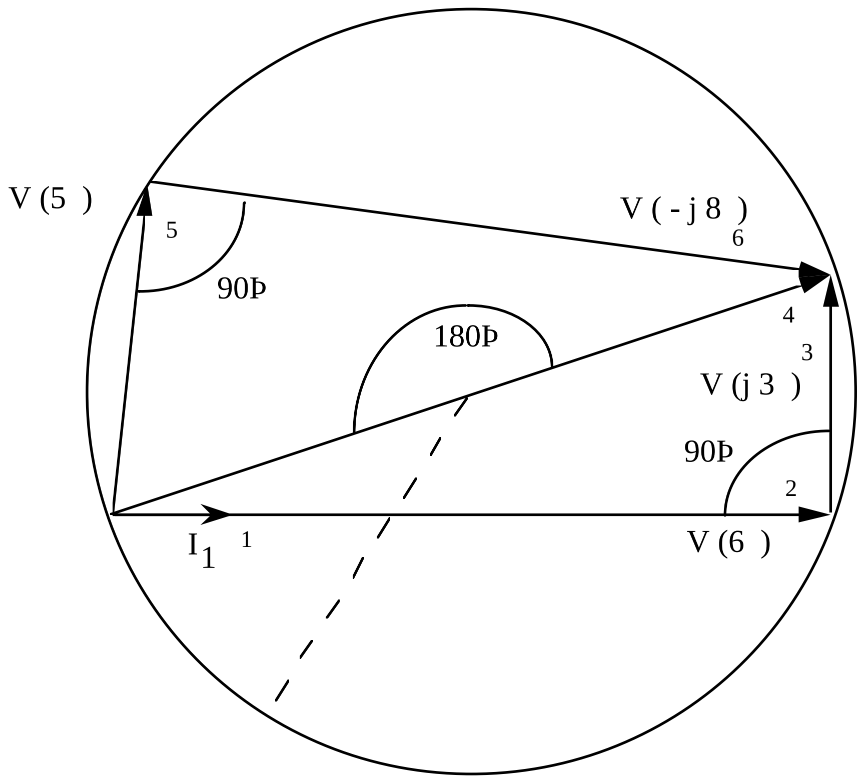
4. De spanning over de impedanties (6½ + j3½) en (5½ - j8½) zijn gelijk. Dit betekent dat we I_2 kunnen bepalen uit (5½ - j8½) I_2 = vektor 4. We kennen de hoek tussen $5.I_2$ en $-j8.I_2$(-90_) De amplitudes van deze vektoren verhouden zich als 5½ en 8 ½.



Of (eveneens correct):



Wegens een stelling uit de meetkunde die zegt dat de middelpuntshoeken van een cirkel het dubbel zijn van de omtrekshoeken, liggen de vier hoekpunten van de vektoren 2, 3, 5 en 6 op een cirkel. Samen met de gekende amplitude verhouding van de vektoren 5 en 6, kunnen we grafisch 5 en 6 bepalen.



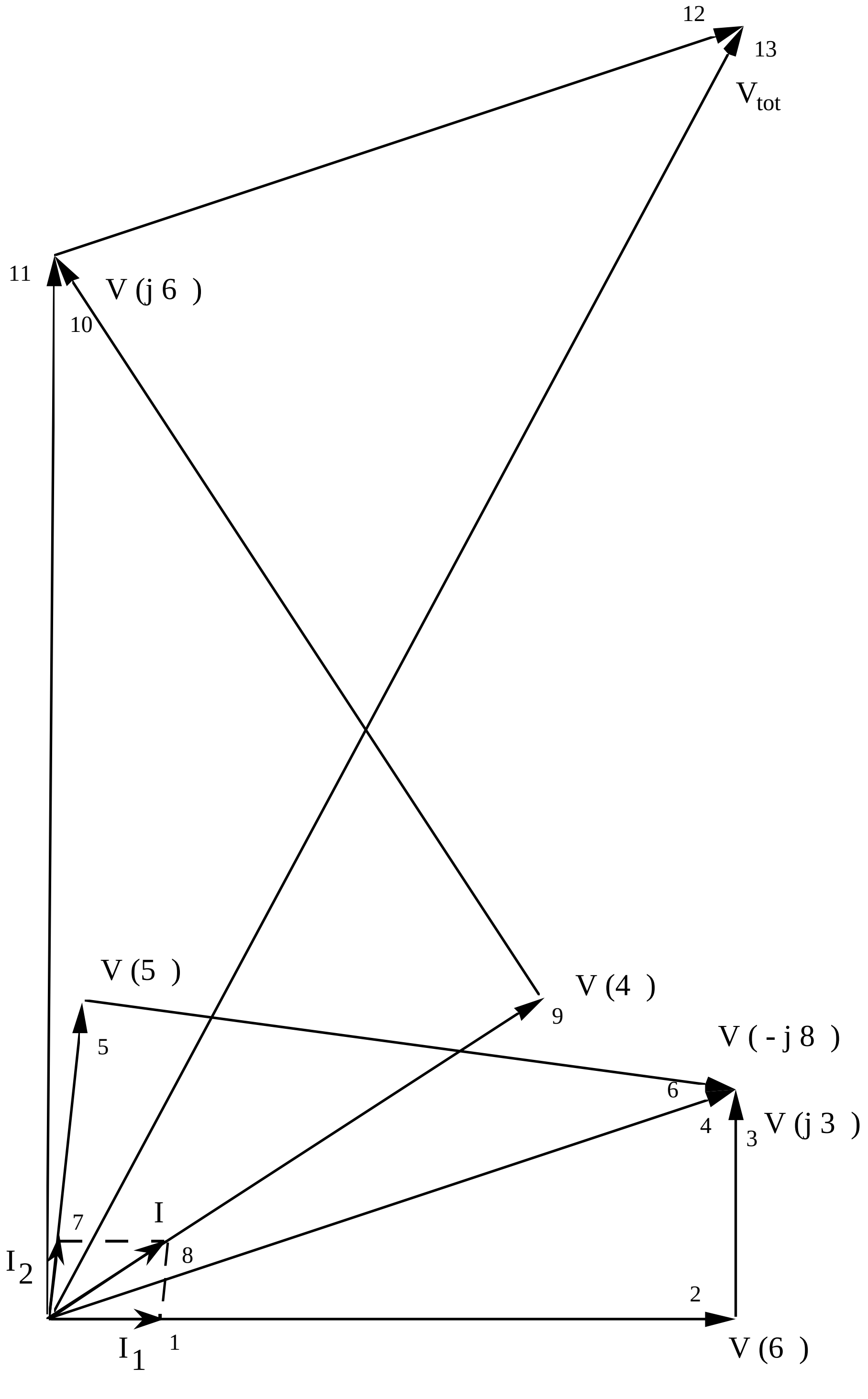
5. De stroom I_2 bepalen we uit: I_2=V(5½)/5½.

6. Vektorieel samenstellen van I_1 en I_2 geeft de totale stroom I_1+I_2.

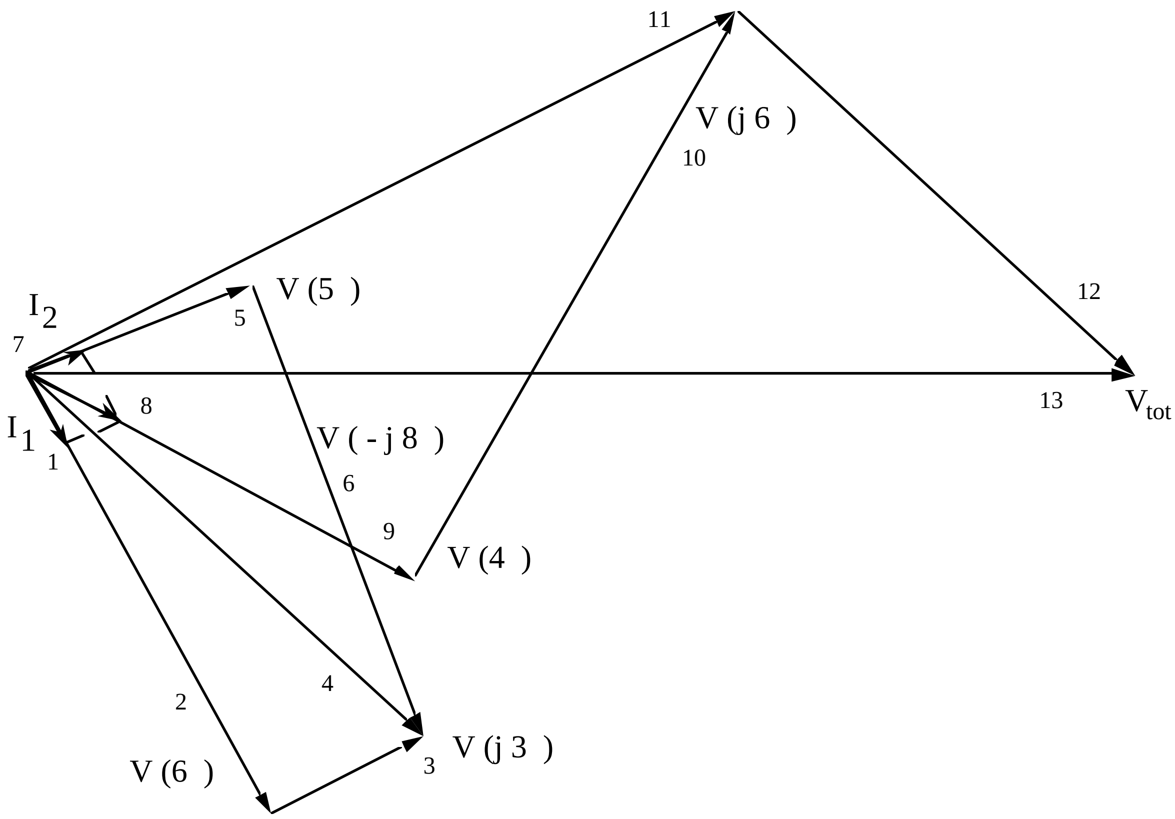
7. V(4 ½)=4.I

8. V(j6½)=6I/90_

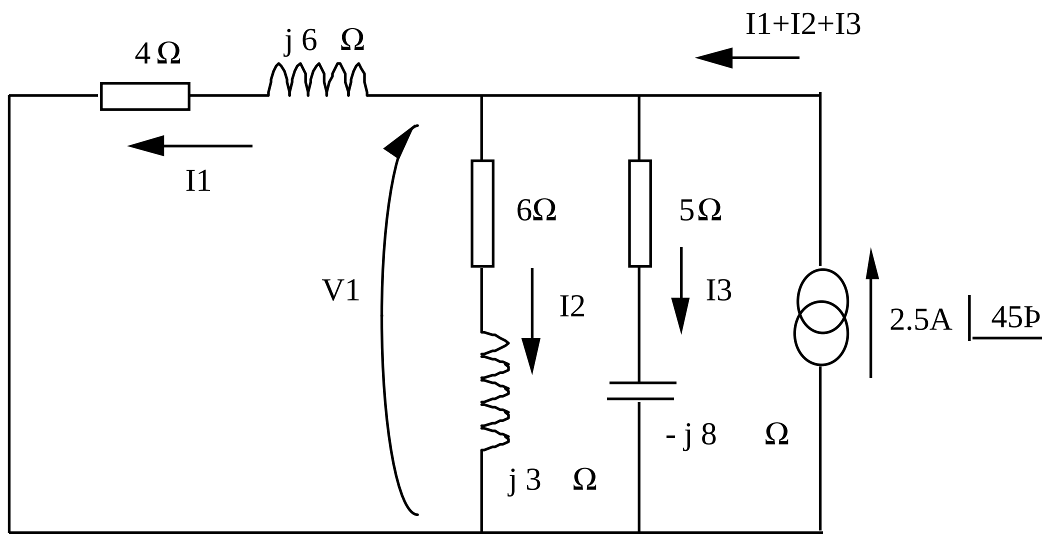
9. De totale spanning wordt gegeven door de vektoriële som van de vektoren 9, 10 en 12.



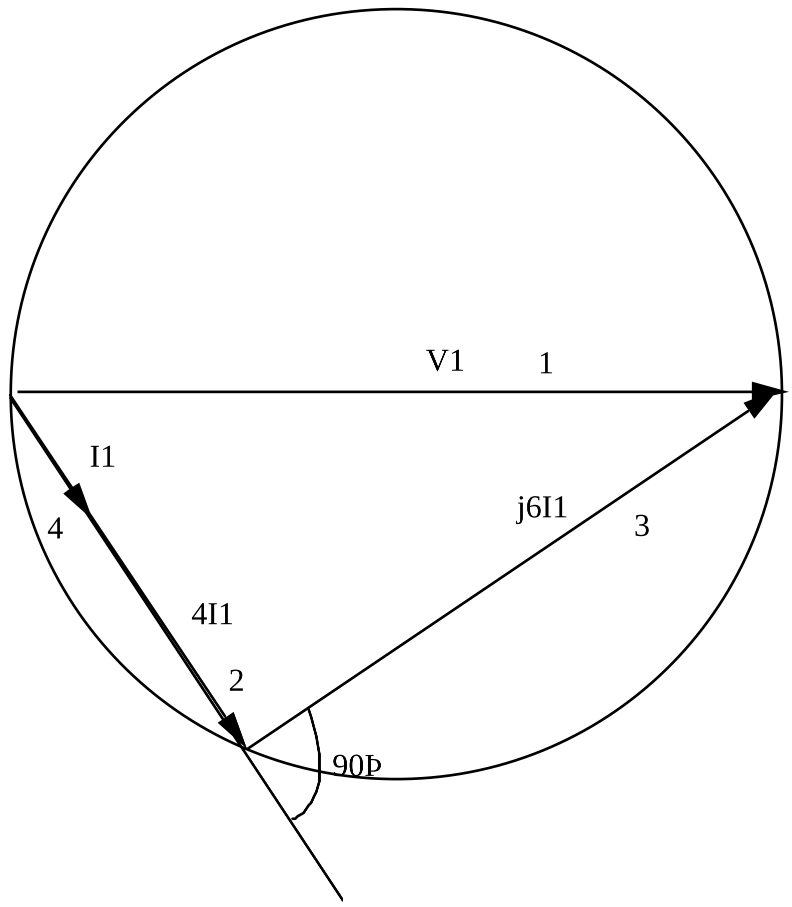
10. De vektor 13 geeft ons de gekende totale spanning. We weten dat deze amplitude 10V en fase 0_ heeft. Door de schaalfaktor aan te passen en de figuur te roteren is het dan mogelijk elke andere spanningsvektor te bepalen in amplitude en fase.



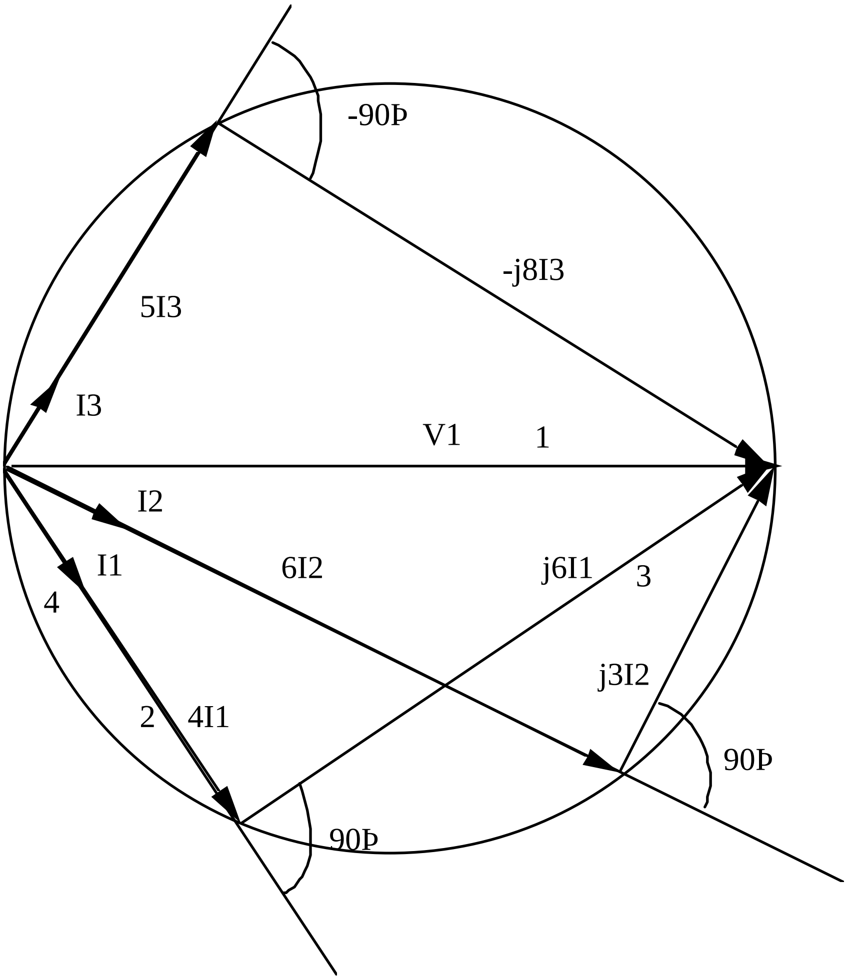
Laat ons voor het netwerk met de stroombron als referentie eens de spanning V1 nemen. Deze staat immers over alle paralleltakken, en het moet niet altijd een stroom zijn.



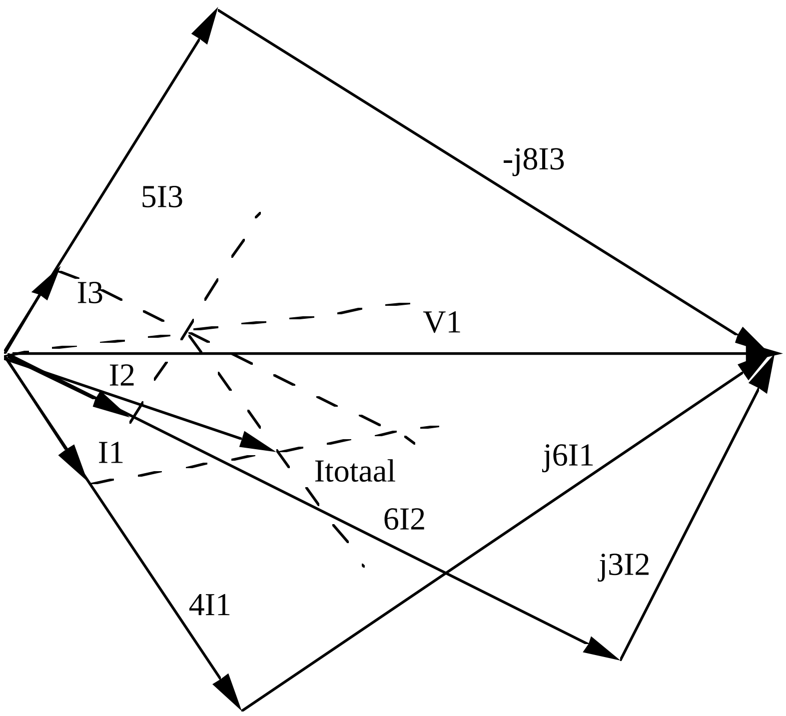
1. De vektor (1) V_1=(4½ + j6½)I_1=(6½ + j3½)I_2=(5½ - j8½)I3. De spanningsvektoren (2) 4I_1 en (3) j6I_1 maken een hoek van 90_ en hun amplitudes verhouden zich als 4 en 6. De hoekpunten van de vektoren V_1, 4I_1 en 6I_1 liggen op een cirkel. I_1 (4) is dan 1/4 van vektor 2.



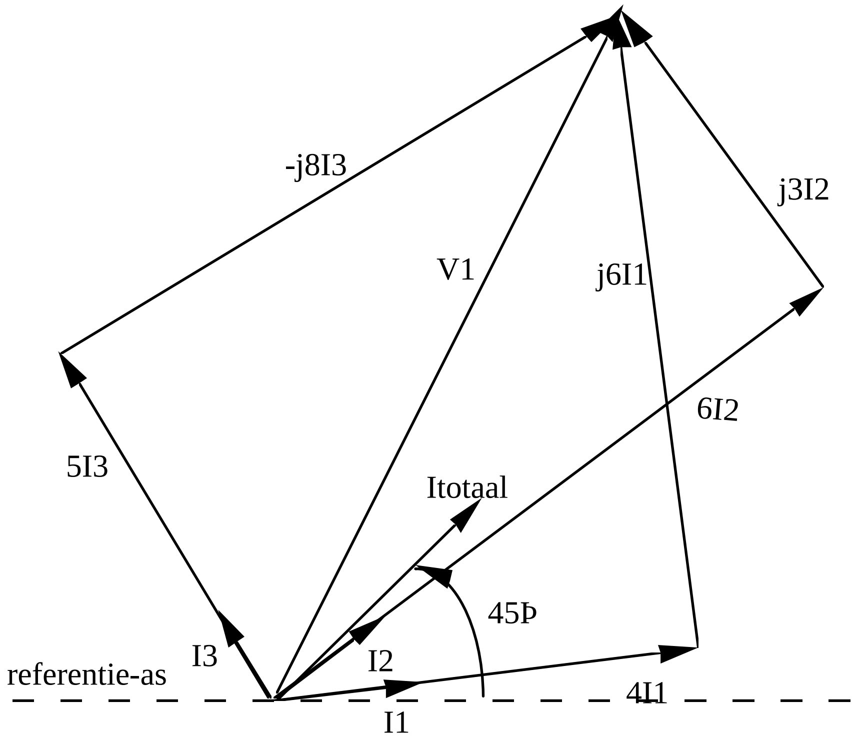
2. De stromen I_2 en I_3 worden op analoge wijze gevonden.



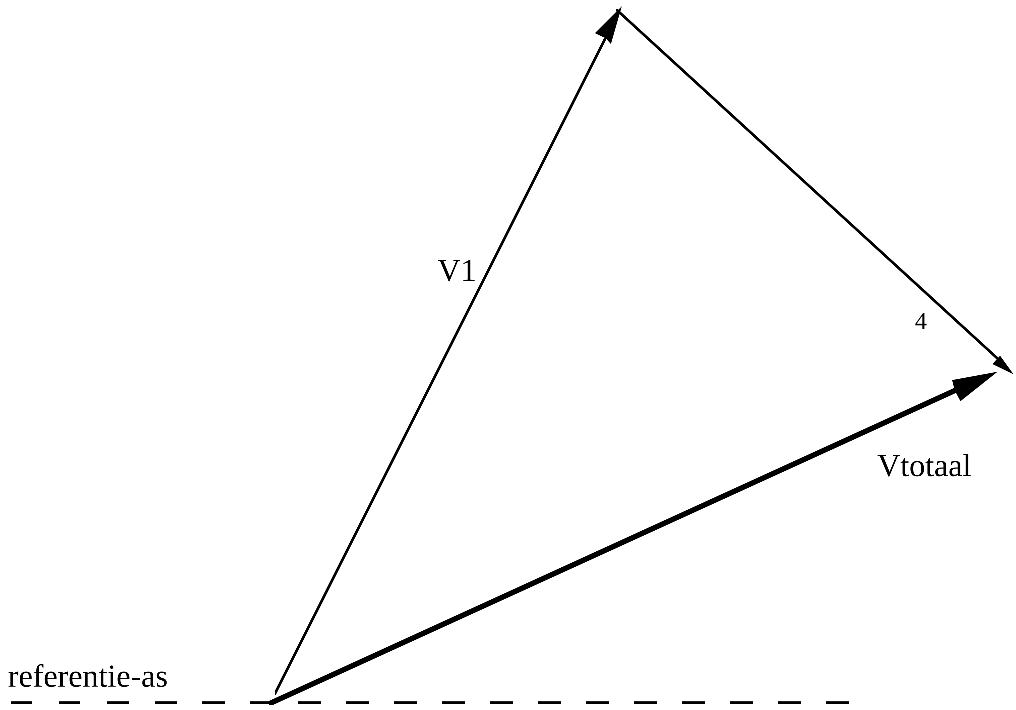
3. De totale stroom is de som van I_1, I_2 en I_3.



4. De totale stroom was gelijk aan 2.5A/45_. Door de tekening te roteren en de schaalfaktor aan te passen kunnen we de juiste amplitude en fase van alle vektoren aflezen.



Om nu een waarde te bepalen voor het volledige netwerk, moeten we de overeenstemmende vektoren uit de eerste en de tweede oplossing optellen, natuurlijk rekening houdend met de schaalfaktoren. Dit wordt als oefening overgelaten aan de lezer. Als voorbeeld, de spanning over de paralleltak was vektor 4 in het eerste stuk en V_1 in het tweede stuk. De totale spanning is de som van deze twee vektoren:

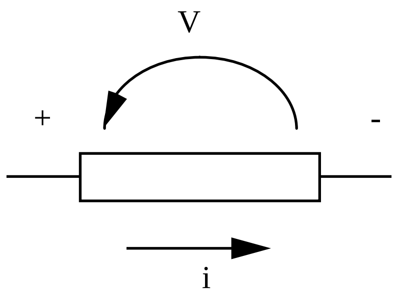


Vergelijk ook eens met de numeriek bepaalde oplossing. De methode der knoopspanningen bv. geeft voor de hierboven bepaalde spanning:

$$\frac{V}{6+j3}+\frac{V}{5-j8}+\frac{V-10}{4+j6}-2{,}5\underline{|45^\circ}=0 \text{ of } V=9.257\underline{|32^\circ}\,.$$

9. Vermogenberekeningen

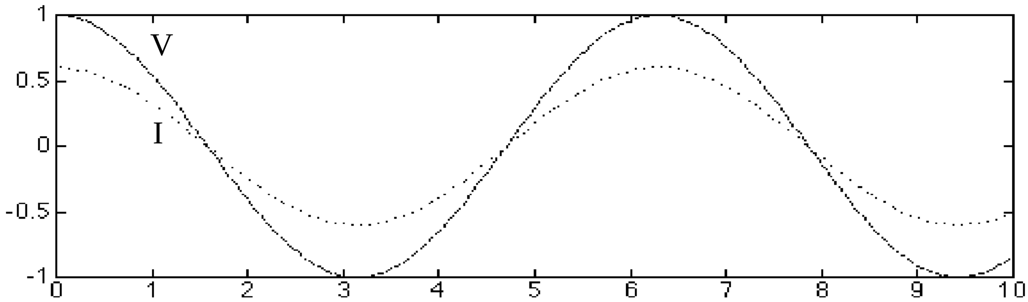
Het vermogen verbruikt in een element wordt gegeven door $p = v \cdot i$ als i gekozen wordt van + naar -. Indien het op deze wijze berekende vermogen negatief is, kunnen we besluiten dat het element vermogen levert aan het netwerk, in plaats van er te verbruiken.

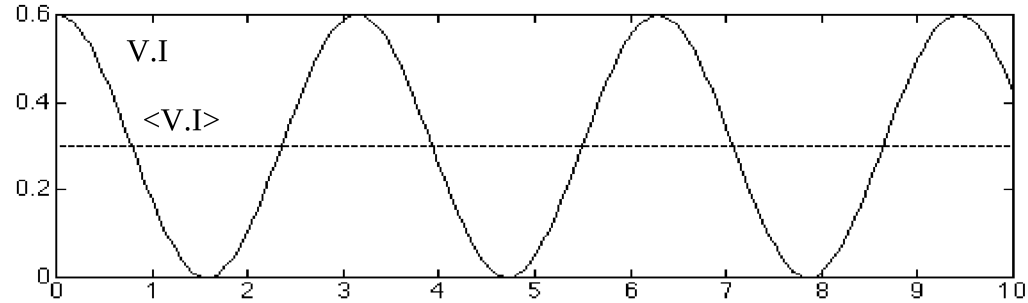


Uiteraard is het vermogen geleverd door een element het tegengestelde van het vermogen verbruikt door een element.

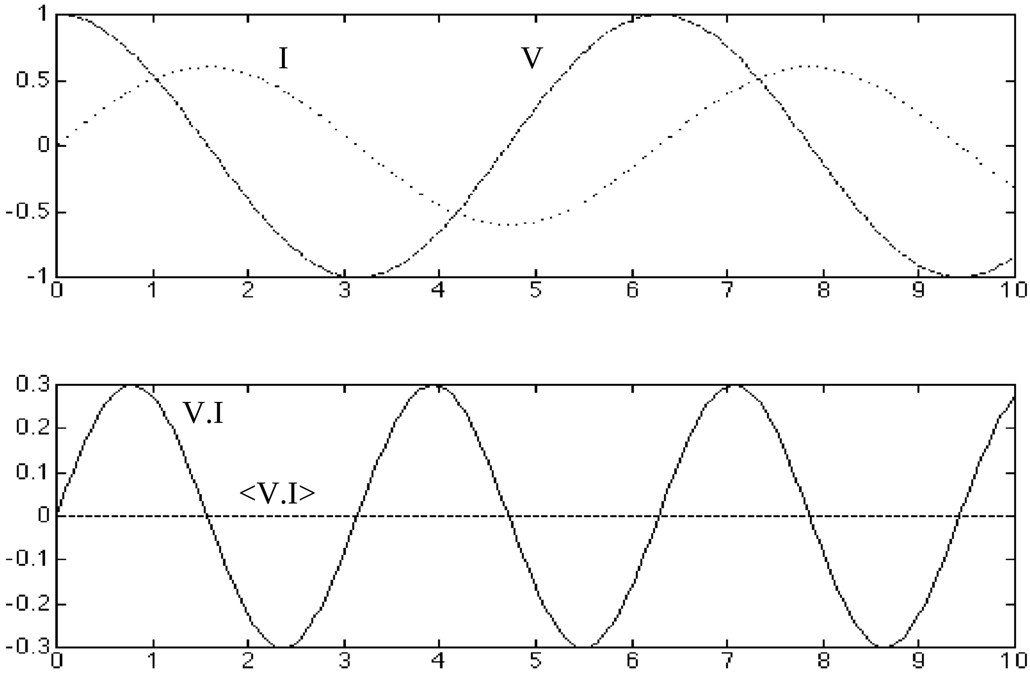
In het geval van tijdsafhankelijke netwerken wordt het vermogen ook tijdsafhankelijk: $p(t) = v(t) \cdot i(t)$.

Beschouw bijvoorbeeld een weerstand. We weten dat in een weerstand vermogen gedissipeerd wordt. Als door een weerstand R een stroom $i = I\cos(\omega t)$ vloeit, is de spanning over de weerstand $v = RI\cos(\omega t)$ en het vermogen $v \cdot i = RI^2\cos^2(\omega t)$.
Omdat een tijdsafhankelijk vermogen onhandig is om mee te werken, voeren we het gemiddeld vermogen in : $\langle p \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = VI\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\,dt = \frac{VI}{2}$.

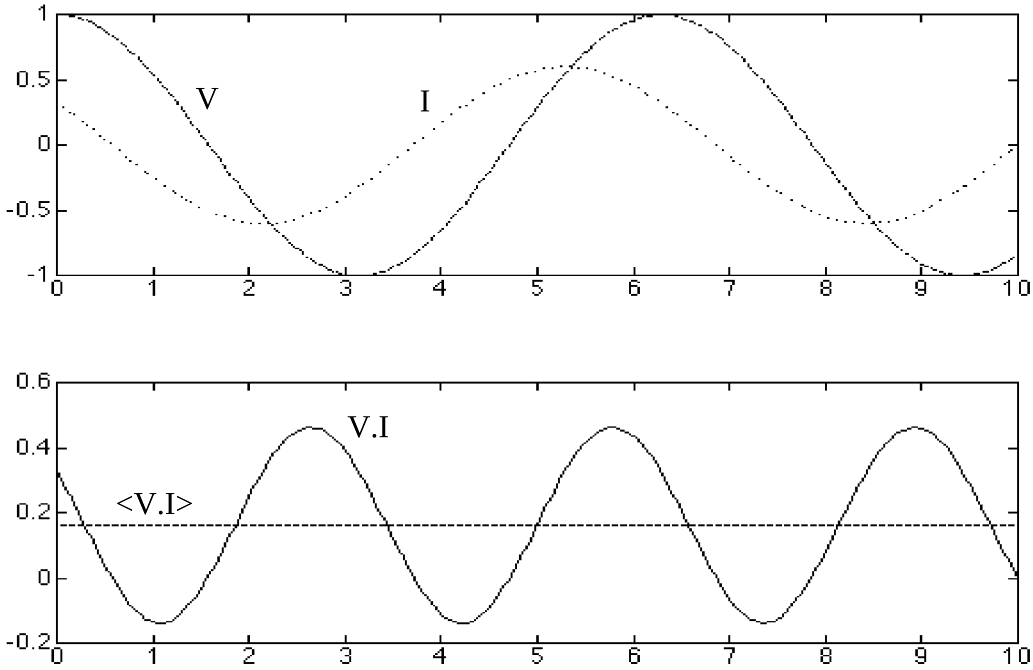




Anderszijds weten we dat een ideale spoel bijvoorbeeld, geen vermogen dissipeert, maar wel vermogen kan opslaan en weer afgeven. Als door een spoel L een stroom $i = I\cos(\omega t)$ vloeit, is de spanning over de spoel $v = L\frac{di}{dt} = -\omega LI\sin(\omega t)$ en het vermogen $v \cdot i = -\frac{\omega LI^2}{2}\sin(2\omega t)$. Het gemiddeld vermogen is nul, maar er is een harmonisch variërend vermogen met als amplitude $\frac{VI}{2}$, met V en I de amplitudes van de spanning en de stroom.



Beschouw nu een willekeurige impedantie, waarbij er een faseverschil ϕ bestaat tussen v en i. Neem $v = V\cos(\omega t)$ en $i = I\cos(\omega t - \phi)$.



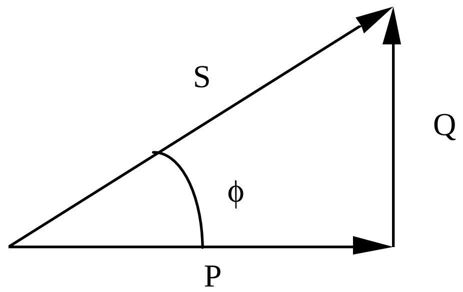
We kunnen i splitsen in twee componenten, een deel in fase met v, en een deel dat 90° verschoven is ten opzichte van v, namelijk

$i = I\cos(\omega t - \phi) = I\cos(\omega t)\cos(\phi) + I\sin(\omega t)\sin(\phi)$. Het vermogen is dan

$p = VI\cos(\phi)\cos^2(\omega t) + \frac{VI}{2}\sin(\phi)\sin(2\omega t)$. De eerste term geeft aanleiding tot het gemiddeld vermogen $\langle p\rangle = \frac{VI}{2}\cos(\phi)$ terwijl de tweede term een harmonisch variërend vermogen voorstelt met als amplitude $\frac{VI}{2}\sin(\phi)$.

We voeren nu het complex vermogen S in, dat in funktie van de complexe spanning en stroom geschreven wordt als $S = \frac{VI^*}{2} = \frac{|V||I|}{2}(\cos(\phi) + j\sin(\phi)) = P + jQ$.

Vektorvoorstelling:



We zitten nu bij wijze van spreken met 3 vermogens: $|S| = V_e I_e$, $|P| = V_e I_e \cos(\phi)$ en $|Q| = V_e I_e \sin(\phi)$, met $V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$ en $I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$. Men noemt S het complex of schijnbaar vermogen, P het werkelijk of reëel vermogen en Q het reaktief of imaginair vermogen. Alleen P is een vermogen dat werkelijk verbruikt wordt in de schakeling. Om dit onderscheid duidelijk te maken wordt enkel P uitgedrukt in Watt. S krijgt als dimensie de VoltAmpère (VA), en Q de VoltAmpère reaktief (VAr).

De faktor $\cos(\phi)$ noemt men de arbeidsfaktor (power factor). In de praktijk willen we de arbeidsfaktor zo groot mogelijk maken. Hiervoor zijn verschillende redenen, maar het eenvoudigst te begrijpen is de volgende. Stel dat we een reëel vermogen van 400W nodig hebben. Als $\cos(\phi) = 1$ kunnen we dit realiseren met bv. $V_e = 200V$ en $I_e = 2A$. Als daarentegen $\cos(\phi) = 0.5$ moet $V_e = 400V$ en $I_e = 2A$ of $V_e = 200V$ en $I_e = 4A$ (indien we één van de twee konstant willen houden). Dit stelt hogere eisen aan onze generator, we hebben dikkere kabels nodig voor de hogere stroom of meer isolatie voor de hogere spanning. (Men noemt S soms het geïnstalleerd vermogen, omdat de eisen die aan de installatie gesteld worden, door S bepaald zijn.)

De arbeidsfaktor geeft geen informatie over het teken van ϕ. Als het onderscheid van belang is, zal men spreken van een voorijlende of naijlende $\cos(\phi)$. Voorijlend en naijlend slaat op de fasehoek van de stroom ten opzichte van de spanning. Deze hoek is gelijk aan $-\phi$. We weten ook dat ϕ de fasehoek is van de impedantie waarin we het vermogen berekenen

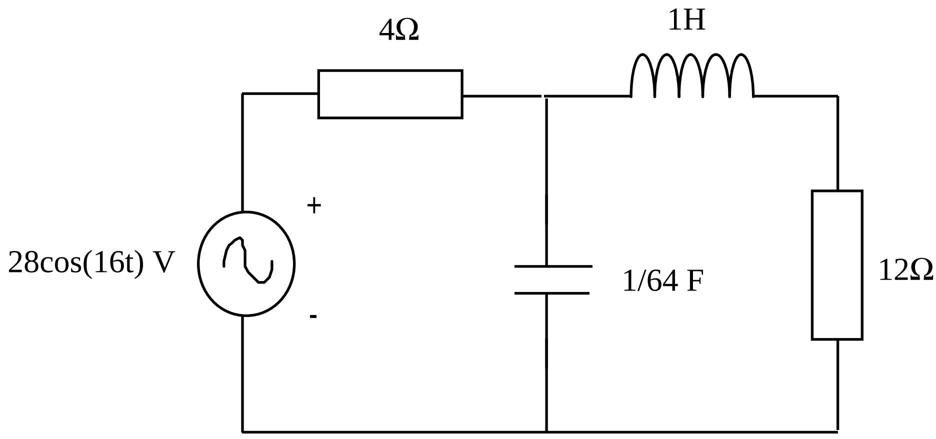
($V\angle 0 = Z\angle\phi \cdot I\angle -\phi$). Dus bij $\phi > 0$ (inductieve impedantie) loopt de stroom achter op de spanning en spreekt men van naijlend, bij $\phi < 0$ (capacitieve impedantie) loopt de stroom voor op de spanning en spreekt men van voorijlend.

Opmerking: sommige werken gebruiken als definitie voor het complex vermogen $S = \frac{V^* I}{2}$ in plaats van $S = \frac{VI^*}{2}$. Hun vermogendriehoek zal op zijn kop staan en het teken van hun ϕ is verschillend. Voorijlend of naijlend houdt dezelfde betekenis (op het teken van ϕ na). Dit is een kwestie van konventie.

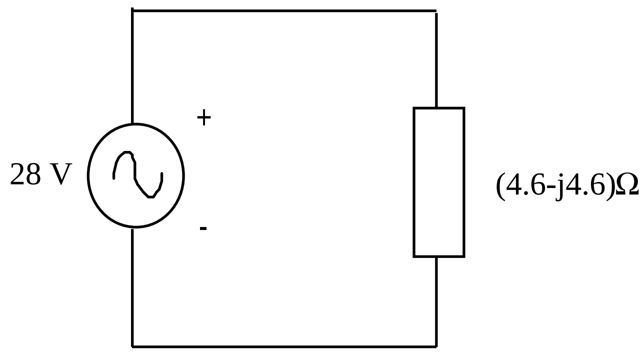
Waarom gebruiken we niet gewoon $S = \frac{VI}{2}$? Als we het geval $V\angle 0 = Z\angle\phi \cdot I\angle -\phi$ beschouwen, vinden we $S = \frac{VI^*}{2} = \frac{|V||I|}{2}(\cos(\phi) + j\sin(\phi))$ en $S = \frac{VI}{2} = \frac{|V||I|}{2}(\cos(-\phi) + j\sin(-\phi))$. Op het eerste zicht is alleen het teken van Q verschillend. Als we daarentegen voor de spanning een fase verschillend van nul nemen, zien we meteen waarom de tweede vorm foutief is. Neem $V\angle\vartheta = Z\angle\phi \cdot I\angle\vartheta - \phi$, dan is $S = \frac{VI^*}{2} = \frac{|V||I|}{2}(\cos(\vartheta - (\vartheta - \phi)) + j\sin(\vartheta - (\vartheta - \phi)))$ maar $S = \frac{VI}{2} = \frac{|V||I|}{2}(\cos(2\vartheta - \phi) + j\sin(2\vartheta - \phi))$. Dit laatste is natuurlijk volledig fout, want het vermogen mag niet afhangen van de gekozen fasereferentie.

Voorbeeld:

We willen het vermogen S bepalen dat de bron in het volgende netwerk moet leveren. (Dit is meestal wat men bedoelt als het vermogen in een netwerk gevraagd wordt. Strikt genomen is het "vermogen in een netwerk" gelijk aan nul, omdat het vermogen van de bron gelijk en tegengesteld is aan de som van de vermogens van alle andere elementen.)

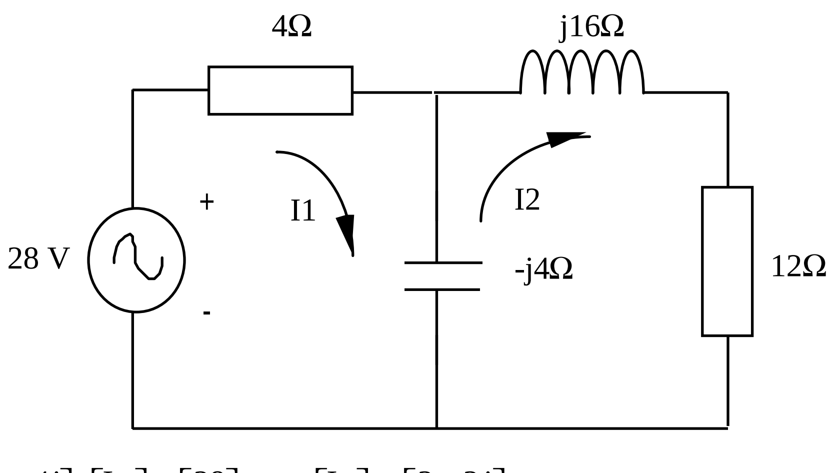


Een eerste (niet erg handige) manier om dit op te lossen is het netwerk te vereenvoudigen tot:



Dit geeft $I = \frac{V}{Z} = \frac{28}{4.6 - j4.6} A = 4.24\underline{|45°} A$, en dus

$S = \frac{VI^*}{2} = \frac{28 \cdot 4.24\underline{|-45°}}{2} VA = 59.4\underline{|-45°} VA$. Dit zal alleen lukken met doodbrave netwerken. Een meer algemene methode is om het netwerk volledig op te lossen. Dit laat toe het vermogen in elk element afzonderlijk te berekenen. Het totaal vermogen is de som van de vermogens in de individuele elementen.



$\begin{bmatrix} 4-4j & 4j \\ 4j & 12+12j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 0 \end{bmatrix}$, dus $\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+3j \\ -j \end{bmatrix}$.

Het vermogen geleverd door de bron is nu $S = \frac{28 \cdot (3-3j)}{2} \text{VA} = 59.4\underline{|-45°}\text{VA}$.

Om na te gaan of dit gelijk is aan de som van de vermogens verbruikt in de elementen, schrijven we S in funktie van de stroom en de impedantie:

$$S = \frac{VI^*}{2} = \frac{ZII^*}{2} = \frac{Z|I|^2}{2}$$

Dan wordt:

$$S_{(4)} = \frac{4|I_1|^2}{2} = 36\text{VA}$$

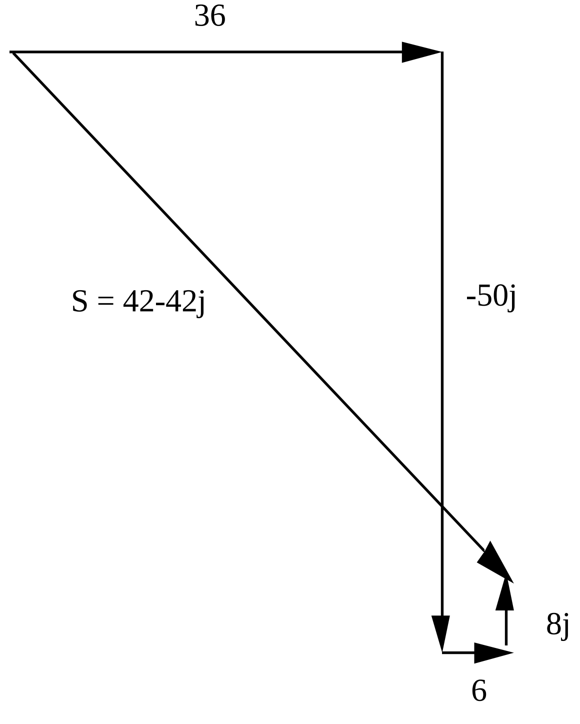
$$S_{(-4j)} = \frac{-4j|I_1 - I_2|^2}{2} = -50j\text{VA}$$

$$S_{(16j)} = \frac{16j|I_2|^2}{2} = j8\text{VA}$$

$$S_{(12)} = \frac{12|I_2|^2}{2} = 6\text{VA}$$

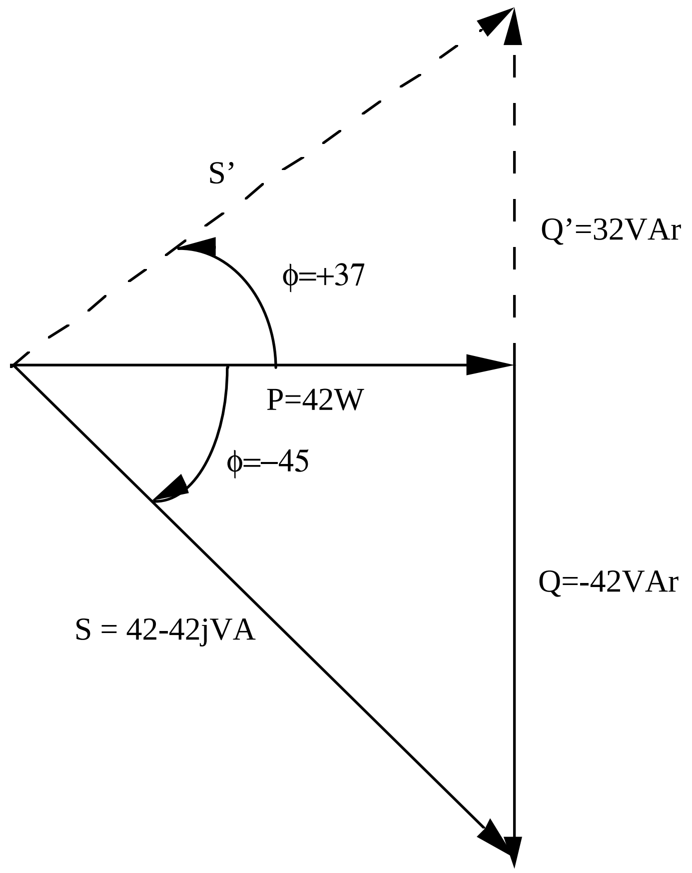
$S_{totaal} = S_{(4)} + S_{(-4j)} + S_{(16j)} + S_{(12)} = 42 - 42j\text{VA}$.

Vektoriële voorstelling:



De arbeidsfaktor van dit netwerk is $\cos(-45°) = 0.707$ voorijlend. Laat ons nu proberen de arbeidsfaktor te verbeteren (van het vermogen geleverd door de bron).

We gaan dit doen door een zuiver reaktief element in parallel met de spanningsbron te plaatsen (waarom in parallel? Wat als het een stroombron is?). Stel dat we een arbeidsfaktor willen bereiken van 0.8 naijlend. We gaan dus ϕ veranderen van -45_ tot +37_. Aangezien het werkelijk vermogen hetzelfde moet blijven, zullen we Q moeten aanpassen. Om de nieuwe waarde Q' te bekomen is een extra reaktief vermogen nodig van $Q' - Q = 32 + 42\,\mathrm{VAr} = 74\,\mathrm{VAr}$.

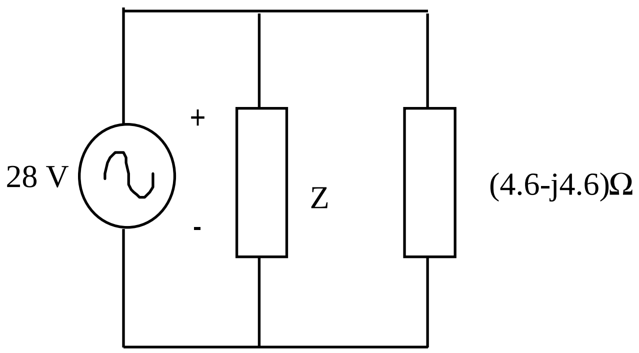


We zoeken met andere woorden een element met $S = j74\,\mathrm{VA}$. Aangezien dit element in parallel met $V = 28V$ staat kunnen we schrijven: $S = \frac{VI^*}{2} = \frac{V}{2}\cdot\frac{V^*}{Z^*} = \frac{|V|^2}{2Z^*}$ dus

$Z = \left(\frac{|V|^2}{2\cdot S}\right)^* = 5.4j$. Aangezien we $\omega = 16\frac{rad}{s}$ hadden, is Z een spoel van 332mH.

Alternatieve methode voor de korrektie van de arbeidsfaktor:

We kunnen de arbeidsfaktor ook korrigeren zonder expliciet de vermogendriehoek te bepalen. We weten dat ϕ gelijk is aan de fase van de impedantie gezien door de bron.



Door nu een zuiver reaktieve Z te bepalen zodanig dat $Z//(4.6-4.6j)$ als fase +37_ heeft, bekomen we een arbeidsfaktor van 0.8 naijlend.